BORSE 2006/2007 DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA

Come ormai è tradizione, anche per il 2006/2007 l'INdAM ha assegnato 40 borse di studio a studenti meritevoli immatricolati al corso di Laurea in Matematica. La borsa ammonta a 4000 euro ed è rinnovabile di anno in anno, a condizione che vengano superati con profitto tutti gli esami previsti. Quest'ultima edizione del premio si è svolta nell'ambito del *Progetto Lauree Scientifiche*, finanziato dal Ministero per promuovere le iscrizioni ai Corsi di Laurea di carattere scientifico (si veda Archimede n. 3 del 2006, pag. 118).

La prova di selezione è stata effettuata contemporaneamente in quasi tutte le università italiane il 12 settembre 2006. Lo schema della prova ricalca quello delle scorse edizioni: 10 quesiti a risposta multipla e 3 problemi di vario tipo. Gli argomenti sono quelli della parte «generale» dei programmi delle Scuole superiori: algebra, logica, geometria piana e solida, combinatoria e probabilità, aritmetica.

Il numero dei partecipanti è notevolmente cresciuto, giungendo a 729. Fra questi, 350 hanno raggiunto la soglia dei 40 punti su 110, indicata come quota di idoneità dalla commissione giudicatrice (presieduta da Claudio Bernardi e composta da Alessandro D'Andrea, Paolo Francini, Stefano Mortola e Roberto Peirone).

A parziale testimonianza dell'affidabilità della prova proposta, anche quest'anno alcuni dei migliori classificati hanno dovuto rinunciare alla borsa, essendo risultati vincitori dei concorsi per l'accesso a collegi o centri universitari di eccellenza (Normale di Pisa, Scuola Superiore di Catania, Galileiana di Padova, collegi di Pavia, S. Anna di Pisa, ecc). L'ultimo dei vincitori è risultato così il 49° nella graduatoria e ha realizzato 73 punti (il primo ha totalizzato 105 punti). Come in passato, gran parte delle borse è andata a studenti del nord o del centro Italia: solo 5 dei primi 60 classificati hanno svolto la prova in una sede a sud di Roma.

I testi e le soluzioni delle prove degli anni passati sono disponibili sul sito di Archimede (**www.lemonnier.it/archimede**). Per il concorso del prossimo anno si consulti tra qualche mese il sito dell'INdAM (**www.altamatematica.it**).

IL TESTO DELLA PROVA

La prova consiste in dieci quesiti a risposta multipla e in tre problemi di cui si richiede lo svolgimento. Per quanto riguarda i quesiti a risposta multipla, una e una sola tra le cinque risposte è esatta; sono assegnati 0 punti per ogni risposta sbagliata, 1.5 punti per ogni risposta non data e 5 punti per ogni risposta esatta. Per ciascuno dei problemi viene assegnato un punteggio da 0 a 20.

La durata della prova è di tre ore. È vietato l'uso di qualsiasi strumento di calcolo.

A) QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

1. Alice e Bob fanno un gioco in cui, alternandosi, si comunicano un numero naturale. A ogni turno si deve dire un numero calcolato nel modo seguente: se n è l'ultimo numero detto dall'avversario, si sceglie una fattorizzazione di n come prodotto di due naturali a e b, e si comunica la somma $a + b$, che non deve essere però superiore a n. Ad esempio le risposte lecite a 30 sono: $11 = 5 + 6$, $13 = 3 + 10$, $17 = 2 + 15$. Vince il giocatore che non lascia scelte possibili all'avversario. Nella partita che stanno giocando, Alice inizia con il numero 45. In tale situazione

(A) Alice vince sicuramente, comunque scelga le proprie mosse
(B) Alice vince, qualunque siano le mosse di Bob, ma solo giocando opportunamente
(C) Bob vince sicuramente, comunque scelga le proprie mosse
(D) Bob vince, qualunque siano le mosse di Alice, ma solo giocando opportunamente
(E) La partita può andare avanti all'infinito

2. Una piramide di vertice V ha per base un triangolo ABC. I tre spigoli laterali VA, VB e VC sono uguali. Sia H la proiezione ortogonale del punto V sul piano ABC. Allora il punto H

(A) coincide con l'ortocentro (punto di intersezione delle altezze) di ABC
(B) è sempre esterno al triangolo ABC
(C) può coincidere con uno dei punti A, B o C
(D) coincide con il circocentro (punto di intersezione degli assi dei lati) di ABC
(E) è sempre interno al triangolo ABC

3. Quante sono le diagonali in un prisma a base pentagonale? (Per *diagonale* intendiamo un segmento che ha per estremi due vertici non appartenenti ad una stessa faccia.)

(A) 10
(B) almeno 60
(C) 20
(D) 30
(E) più di 30 ma meno di 60

4. Nell'isola di Smullyan vivono infiniti abitanti $A_0, A_1, A_2, \ldots$. Ciascun abitante è un furfante, e allora mente sempre, oppure è un cavaliere, e allora dice sempre la verità. Un giorno, tutti gli abitanti A_{2n} (quelli di indice pari) dicono la seguente frase: «Sull'isola c'è solo un numero finito di cavalieri». Se ne può dedurre che

(A) ci sono infiniti cavalieri, ma non siamo in grado di stabilire se i furfanti siano i numero finito o infinito
(B) ci sono infiniti furfanti e infiniti cavalieri
(C) ci sono infiniti furfanti e un numero finito di cavalieri
(D) ci sono infiniti cavalieri e un numero finito di furfanti
(E) ci sono infiniti furfanti, ma non siamo in grado di stabilire se i cavalieri siano in numero finito o infinito

5. Se indichiamo con P_n la cifra delle unità del numero 3^n, espresso come al solito in notazione decimale, allora $P_1 + P_2 + \ldots + P_{2006}$ vale

(A) 23432
(B) 13429
(C) 9986
(D) 10032
(E) 9028

6. Prendendo a caso tre vertici distinti di un poligono regolare con 40 lati, qual è la probabilità che siano vertici di un triangolo rettangolo?

(A) 3/38
(B) 1/26
(C) 1/38
(D) 1/39
(E) 1/13

7. Sia $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ l'insieme dei numeri naturali. La funzione $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ è crescente cioè $f(n + 1) \quad f(n)$, e ha la proprietà che $f(f(n)) = f(n^2)$, per ogni n. Se $f(12) = 9$ allora $f(2006)$ è

(A) 2003
(B) 1962
(C) 9
(D) non univocamente determinato perché dipende dalla scelta di f
(E) 4024036

8. Si lanciano contemporaneamente due dadi, il primo ben equilibrato (nel senso che, in ciascun tiro, le 6 facce si presentano con uguale probabilità), mentre il secondo truccato (nel senso che alcune facce si presentano con maggiore probabilità delle altre). La probabilità che la somma dei numeri che escono sia dispari è

(A) 1/2 comunque sia fatto il dado truccato
(B) varia a seconda delle caratteristiche del dado truccato, ma è sempre minore di 3/4

(C) varia a seconda delle caratteristiche del dado truccato, ma è sempre maggiore di 1/4
(D) maggiore di 1/2, comunque sia fatto il dado truccato
(E) minore di 1/2, comunque sia fatto il dado truccato

9. Per quanti interi positivi m il numero $m^2 + 3m$ è un quadrato perfetto?

(A) tre
(B) sei
(C) infiniti
(D) uno
(E) nessuno

10. In una scacchiera 5×5 ci sono 25 lampadine, una in ogni casella della scacchiera. Inizialmente tutte e 25 le lampadine sono spente. Ogni mossa consiste nel toccare una lampadina L e questo provoca il cambiamento di stato di tutte le lampadine della riga e della colonna della lampadina L, cioè le lampadine spente si accendono e, viceversa, quelle accese si spengono. Dopo m mosse ci si accorge che tutte le 25 lampadine sono accese. Il minimo valore possibile di m è

(A) 25
(B) 5
(C) 3
(D) 13
(E) 10

B) PROBLEMI

1. A ciascuno degli 8 vertici di un cubo assegniamo un valore +1 o –1, e ad ognuna delle 6 facce assegniamo il prodotto dei valori corrispondenti ai suoi 4 vertici. In questo modo abbiamo in tutto 8 + 6 = 14 numeri, che possiamo sommare, indicando con S il risultato.

(a) Trovare il massimo valore possibile per S.
(b) Dimostrare che S è sempre pari.
(c) Dimostrare che S non può essere un multiplo di 4.
(d) Trovare il minimo valore possibile per S.

2. Dato un triangolo acutangolo ABC, si traccino le tre altezze AA', BB' e CC', che si incontrano nell'ortocentro H. Indichiamo come al solito con α, β e γ le ampiezze degli angoli di ABC.

(a) Dimostrare che il quadrilatero $AB'HC'$ è inscrivibile in una circonferenza.
(b) Dimostrare che i triangoli ABC, $AB'C'$, $BC'A'$ e $CA'B'$ sono tutti simili fra loro.

(c) Per quali valori di α, β e γ il triangolo $A'B'C'$ è ancora acutangolo?
(d) Dimostrare che le circonferenze circoscritte ai quattro triangoli ABC, ABH, BCH e CAH hanno lo stesso raggio.

3. È dato un polinomio $p(x)$ di grado n a coefficienti reali.

(a) Mostrare che $p(x-1)$ è anch'esso un polinomio di grado n.
(b) Mostrare che, se $p(x)$ non è costante, allora $p_1(x) = p(x) - p(x-1)$ è un polinomio di grado minore di n.

Continuando in questo modo, possiamo definire i polinomi

$$p_2(x) = p_1(x) - p_1(x-1), \quad p_3(x) = p_2(x) - p_2(x-1), \quad \dots$$

(c) Mostrare che $p_n(x)$ è costante, cioè che assume lo stesso valore per ogni x.
(d) Sia $q(x)$ l'unico polinomio di grado 2005 tale che $q(k) = 2^k$ per ogni intero 0 k 2005. Determinare $q(2006)$.

RISOLUZIONI

A) QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

1. La risposta corretta è (A). Osserviamo innanzitutto che le condizioni poste implicano che vince chi raggiunge un numero primo. Le possibili fattorizzazioni di 45 sono $3 \cdot 15$ e $5 \cdot 9$. Quindi Bob può rispondere con 14 o con 18. Nel primo caso, la sequenza di mosse successive è obbligata: Alice dice 9 (essendo $14 = 2 \cdot 7$ l'unica fattorizzazione di 14), Bob è costretto a dire 6 (unica possibilità: $9 = 3 \cdot 3$) e Alice vince con il numero primo 5 (unica scelta: $6 = 2 \cdot 3$). Se invece Bob risponde con 18, allora per Alice ci sono due possibilità: $2 + 9 = 11$, numero primo, oppure $3 + 6 = 9$, che, come già visto, forza Bob a dire 6 e Alice a dire 5. Dunque vince Alice, giocando in qualsiasi modo.

2. La risposta corretta è (D). I 3 triangoli AHV, BHV e CHV sono uguali, in quanto rettangoli, con il cateto HV in comune e con le ipotenuse uguali tra loro per ipotesi (Figura 1). In particolare si ha quindi $AH = BH = CH$, cioè H è equidistante dai tre vertici. Perciò H è il centro della circonferenza circoscritta ad ABC, vale a dire il punto di intersezione dei tre assi dei lati (il circocentro di ABC). Nei casi in cui ABC sia acutangolo, rettangolo od ottusangolo, il punto H è, rispettivamente, interno ad ABC, punto medio dell'ipotenusa, o esterno ad ABC, come illustrano i casi (a), (b) e (c) in Figura 1.

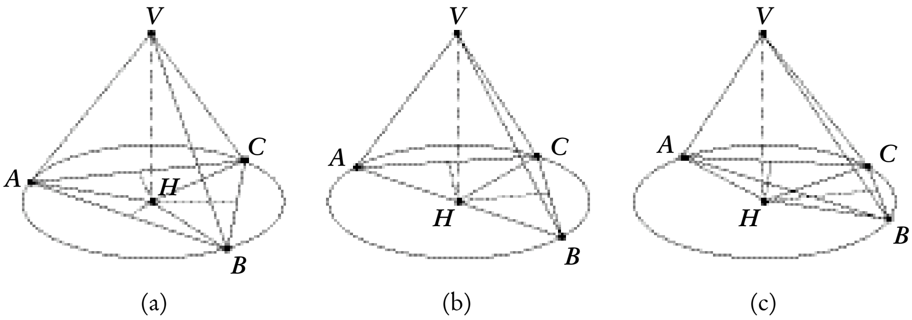

Figura 1 - Quesito 2

3. La risposta corretta è (A). Il prisma ha 10 vertici, 5 in ciascuna delle due basi. Fissato un vertice V su una delle due basi, esattamente 2 dei 5 vertici dell'altra base non appartengono a una faccia contenente V, quindi ci sono esattamente due diagonali aventi V come estremo (Figura 2). Dunque, il numero totale delle diagonali è $5 \cdot 2 = 10$.

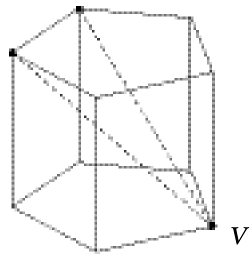

Figura 2 - Quesito 3

4. La risposta corretta è (B). Gli abitanti di indice pari fanno la stessa affermazione, dunque o tutti dicono la verità (cioè sono tutti cavalieri) oppure tutti mentono (cioè sono tutti furfanti). Se fossero tutti cavalieri, allora ciò che affermano dovrebbe essere vero, dunque sull'isola ci dovrebbe essere un numero finito di cavalieri: assurdo, dato che i numeri pari sono infiniti. Ne segue che gli abitanti di indice pari sono tutti furfanti, dunque il numero di furfanti è infinito. D'altra parte, ciò che dicono i furfanti è sempre falso, il che significa che anche il numero dei cavalieri è infinito. Si noti che i cavalieri non sono necessariamente tutti gli abitanti di indice dispari, ma sono in generale un sottoinsieme di questi.

5. La risposta corretta è (D). La cifra delle unità di 3^n assume periodicamente i valori 3, 9, 7 e 1. La somma di questi 4 numeri è 20. Allora, essendo $2006 = 501 \cdot 4 + 2$, si ha

$$P_1 + P_2 + \ldots P_{2006} = \underbrace{20 + 20 + \ldots + 20}_{501 \text{ volte}} + 3 + 9 = 501 \cdot 20 + 12 = 10032\,.$$

6. La risposta corretta è (E). Calcoliamo la probabilità come rapporto tra numero di casi favorevoli N_f e numero di casi possibili N_p. Il numero di casi possibili è pari al numero di possibili terne di vertici distinti presi da un insieme di 40 vertici. Questo è dato dal coefficiente binomiale

$$N_p = \binom{40}{3} = \frac{40!}{3! \cdot (40-3)!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2},$$

che esprime appunto il numero dei sottoinsiemi formati da 3 elementi in un insieme di 40 elementi. Calcoliamo ora il numero di casi favorevoli. Un triangolo inscritto in una circonferenza è rettangolo se e solo se due dei suoi vertici sono diametralmente opposti. Per trovarei casi favorevoli, dobbiamo scegliere due vertici diametralmente opposti (e questo si può fare in 20 modi diversi), e per il terzo vertice restano $40 - 2 = 38$ possibilità. Pertanto $N_f = 20 \cdot 38$ e la probabilità richiesta vale

$$\frac{N_f}{N_p} = (20 \cdot 38) \cdot \left(\frac{3 \cdot 2}{40 \cdot 39 \cdot 38} \right) = \frac{1}{13}.$$

7. La risposta corretta è (C). Prima di tutto, si ha $f(9) = f(f(12)) = f(12^2) = f(144)$. Poiché f è non-decrescente, questo implica che $f(n)$ è costante per $9 \quad n \quad 144$. In particolare, essendo $f(12) = 9$, si ha $f(n) = 9$ per ogni n tra 9 e 144. Analogamente, si ha $f(9) = f(f(100)) = f(100^2) = f(10000)$, che implica $f(n) = 9$ per ogni n tra 9 e 10000. In particolare $f(2006) = 9$. (Iterando induttivamente il ragionamento precedente, concludiamo che, in realtà, $f(n) = 9$ per ogni $n \quad 9$).

8. La risposta corretta è (A). Qualunque sia il numero che esce sul dado truccato, c'è uguale probabilità (1/2) che sul dado equilibrato esca un numero pari o un numero dispari. Dunque, sia che sul dado truccato esca un numero pari, sia che su questo esca un numero dispari, la probabilità che la somma dei due numeri sia dispari è comunque 1/2.

9. La risposta corretta è (D). Prima di tutto osserviamo che $m^2 + 3m$ non può essere il quadrato di un numero minore di m. Poniamo allora $m^2 + 3m = (m + h)^2$, con h intero non negativo. Semplificando, si ottiene $3m = 2mh + h^2$, ovvero

$$m = \frac{h^2}{3 - 2h}.$$

Allora $m^2 + 3m$ è il quadrato di m $(h = 0)$ solo per $m = 0$, ma questa soluzione non è accettabile, dovendo essere m un intero positivo. Si ha che $m^2 + 3m$ è il quadrato di $m + 1$ $(h = 1)$ solo per $m = 1$, soluzione accettabile. Infine, per $h \quad 2$, si ha $h^2/(3 - 2h) < 0$ e dunque non esiste un intero m positivo per cui $m^2 + 2m$ sia il quadrato di $m + h$. In conclusione $m^2 + 3m$ è un quadrato perfetto solo per $m = 1$.

10. La risposta corretta è (B). Prima di tutto osserviamo che, per accendere tutte le lampadine, servono almeno 5 mosse. Infatti, se si toccano meno di 5 lampadine, vi saranno almeno una riga e una colonna sulle quali non è stata toccata neppure una lampadina: pertanto la lampadina che si trova nell'intersezione di tale riga e di tale colonna rimane spenta. D'altra parte, 5 mosse sono sufficienti: ad esempio, toccando le 5 lampadine lungo la prima riga, si avrà l'accensione di tutte le lampadine della scacchiera (ciascuna cambia stato un numero dispari di volte).

B) PROBLEMI

1.

(a) S è somma di 14 numeri, ciascuno dei quali minore o uguale a 1, quindi S 14. Se poniamo +1 su ogni vertice, anche le facce valgono +1 e si ottiene $S = 14$, che è dunque il massimo possibile.

(b) La somma di 14 interi dispari è necessariamente pari.

(c) Partendo da una configurazione, se si cambia il valore di un vertice V da +1 a –1 o viceversa, cambiano segno il valore di V e delle tre facce cui V appartiene. Gli altri valori rimangono invariati. Dunque in S variano quattro addendi, ciascuno dei quali aumenta o diminuisce di 2. Pertanto la differenza tra il vecchio e il nuovo valore di S sarà un multiplo di 4. Poiché nella configurazione descritta nel punto (a) si ha $S = 14$, e poiché ogni altra configurazione si può raggiungere da questa modificando una sequenza di valori, concludiamo che ogni valore possibile per S differisce da 14 di un multiplo di 4, per cui non è divisibile per 4.

(d) La somma di 14 numeri che valgono +1 o –1 è ovviamente minima quando i numeri sono tutti –1, e in tal caso vale –14. Nel nostro caso, $S = -14$ non si può mai ottenere: se poniamo –1 su tutti i vertici, le facce valgono +1. In base al punto (c) il candidato successivo per S è –10. In effetti $S = -10$ si ottiene dando il valore –1 a tutti i vertici, tranne a una coppia di vertici opposti, ai quali assegneremo il valore +1 (Figura 3). In questo modo, ogni faccia vale –1 e si ha $S = -6 + 2 - 6 = -10$, che è dunque il minimo possibile.

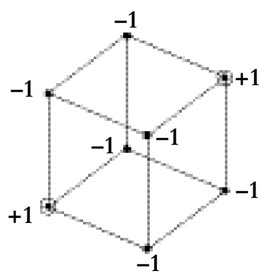

Figura 3 - Problema 1

2.

(a) Un quadrilatero convesso è inscrivibile in una circonferenza se e solo se la somma di due angoli opposti è un angolo piatto. $AB'HC'$ ha i due angoli opposti in B' e in C' retti, dunque è inscrivibile in una circonferenza, della quale AH sarà un diametro (Figura 4 (a)).

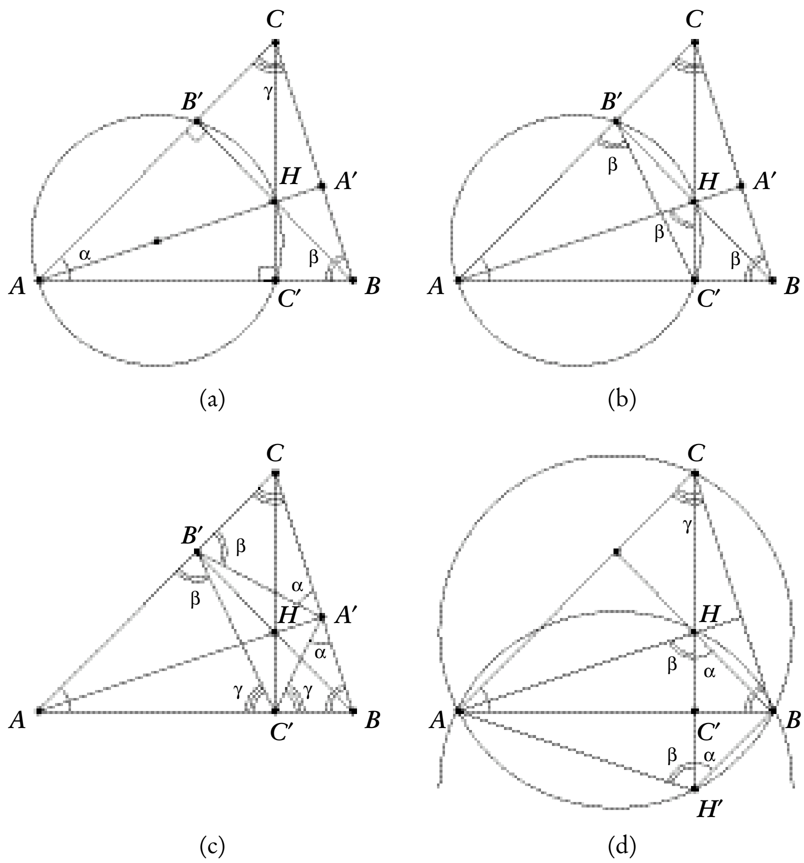

Figura **4** – Problema 2

(b) Proviamo che ABC e $AB'C'$ sono simili mostrando che hanno gli stessi angoli. Per le altre similitudini si ragiona in modo analogo. Si ha $A\hat{B}'C' = A\hat{H}C'$, in quanto angoli che insistono sullo stesso arco della circonferenza $AB'HC'$ (Figura 4 (b)). Inoltre $A\hat{H}C' = A\hat{B}C$, perché entrambi complementari di $H\hat{A}B$. Dunque

$$A\hat{B}'C' = A\hat{B}C = \beta.$$

Analogamente si mostra che $A\hat{C}'B' = \gamma$, ottenendo la similitudine cercata.

(c) In base alle considerazioni della parte (b), gli angoli del triangolo $A'B'C'$ valgono $180° - 2\alpha$, $180° - 2\beta$ e $180° - 2\gamma$ (Figura 4 (c)). Perciò $A'B'C'$ è acutangolo se e solo se $\alpha, \beta, \gamma > 45°$.

(d) Dimostriamo che le circonferenze circoscritte ad ABC e ad ABH sono uguali. Le altre uguaglianze si dimostrano in modo analogo. Sia H' il simmetrico di H rispetto ad AB (Figura 4 (d)). Per quanto visto al punto (b), si ha $A\hat{H}C' = \beta$ e $B\hat{H}C' = \alpha$. Inoltre, per simmetria, $A\hat{H}'B = A\hat{H}B = \alpha + \beta$. Allora

$$A\hat{H}'B + A\hat{C}B = \alpha + \beta + \gamma = 180° \ ,$$

e ciò implica che il quadrilatero $AH'BC$ è inscrivibile in una circonferenza; in altri termini, H' appartiene alla circonferenza ABC, ossia la circonferenza ABC coincide con la circonferenza $AH'B$. Ma, naturalmente, le circonferenze $AH'B$ e AHB sono tra loro uguali in quanto simmetriche rispetto ad AB.

3.

(a) Nello sviluppo di $(x-1)^k$, l'unico monomio di grado k è x^k, mentre gli altri termini hanno grado minore. Quindi, sostituendo $x-1$ al posto di x nel polinomio $p(x)$, comparirà un solo monomio di grado n, proveniente dal termine di grado n di $p(x)$. Tale monomio non può quindi essere cancellato nello sviluppo di $p(x-1)$, essendo tutti gli altri termini di grado minore:

$$p(x) = a_n x^n + \text{monomi di grado minore di } n \quad (a_n \quad 0),$$
$$p(x-1) = a_n(x-1)^n + \ldots = a_n x^n + \text{monomi di grado minore di } n.$$

(b) Per quanto osservato nella parte (a), il monomio di grado n in $p(x-1)$ ha lo stesso coefficiente che in $p(x)$, quindi nella differenza tale termine si semplifica: il polinomio $p(x) - p(x-1)$ avrà dunque grado minore di n.

(c) Applicando più volte la proprietà descritta nel punto (b), si ha grado$(p_1) \quad n-1$, grado$(p_2) \quad n-2$, ecc., fino a grado$(p_n) \quad 0$. Ciò significa che $p_n(x)$ è una costante.

(d) Per la definizione del polinomio $q_1(x)$, abbiamo

$$q_1(2006) = q(2006) - q(2005), \quad \text{ovvero} \quad q(2006) = q(2005) + q_1(2006).$$

Utilizzando iterativamente le definizioni dei polinomi $q_i(x)$, otteniamo

$$\begin{aligned} q(2006) &= q(2005) + q_1(2006) \\ &= q(2005) + q_1(2005) + q_2(2006) \\ &= q(2005) + q_1(2005) + q_2(2005) + q_3(2006) \\ &\ \vdots \\ &= q(2005) + q_1(2005) + \ldots + q_{2004}(2005) + q_{2005}(2006) \end{aligned}$$

Inoltre si ha

$$
\begin{array}{ll}
q_1(k) = q(k) - q(k-1) = 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}, & \text{per ogni } 1 \quad k \quad 2005, \\
q_2(k) = q_1(k) - q_1(k-1) = 2^{k-1} - 2^{k-2} = 2^{k-2}, & \text{per ogni } 2 \quad k \quad 2005, \\
\vdots & \\
q_i(k) = q_{i-1}(k) - q_{i-1}(k-1) = 2^{k-i} & \text{per ogni } i \quad k \quad 2005, \\
\vdots &
\end{array}
$$

fino ad arrivare a $q_{2005}(2005) = 2^{2005-2005} = 1$. Ma, per il punto (c), il polinomio $q_{2005}(x)$ è costante, quindi vale sempre 1. In particolare $q_{2005}(2006) = 1$. Allora

$$
\begin{aligned}
q(2006) &= q(2005) + q_1(2005) + \ldots + q_{2004}(2005) + q_{2005}(2006) = \\
&= 2^{2005} + 2^{2004} + 2^{2003} + \ldots + 4 + 2 + 1 = 2^{2006} - 1.
\end{aligned}
$$

L'ultima parte dell'esercizio era piuttosto impegnativa. Può essere utile vedere la soluzione di una sua versione «semplificata»: se $p(x)$ è un polinomio di grado 2 tale che $p(0) = 1$, $p(1) = 2$ e $p(2) = 4$, quanto vale $p(3)$? In questo caso, scrivendo $p(x) = ax^2 + bx + c$, con semplici sostituzioni si ottiene un sistema che ha come soluzione $a = b = 1/2$ e $c = 1$. Quindi $p(x) = x^2/2 + x/2 + 1$ e $p(3) = 7 = 2^3 - 1$.

Paolo Francini
Istituto di Istruzione Superiore «W.O. Darby»
Cisterna di Latina
paolo.francini@uniroma1.it

Federico Incitti
Royal Institute of Technology (KTH)
Stoccolma (Svezia)
incitti@kth.se