BORSE INDAM 2004

L'INdAM, Istituto Nazionale di Alta Matematica, ha assegnato anche quest'anno 40 borse di studio del valore di 4000 euro a studenti che si immatricolano al corso di Laurea in Matematica. Le borse sono rinnovabili ([1]) di anno in anno per tutta la durata del corso di studi. La partecipazione di quest'anno è stata la più alta di sempre – i partecipanti sono stati 451, ma ben 493 avevano presentato la domanda di partecipazione – al punto che ormai la gara interessa un terzo del totale degli immatricolati di tutta Italia.

La selezione per determinare i vincitori delle borse si è svolta contemporaneamente nelle varie università italiane il 14 settembre 2004. La prova è durata tre ore, e si è articolata in 10 quesiti a risposta multipla insieme a 3 problemi a risposta aperta. La preparazione e la correzione della prova si sono invece svolte presso l'INdAM a Roma, e sono state curate da una commissione costituita da Claudio Bernardi, Alessandro D'Andrea, Corrado De Concini (presidente), Paolo Gronchi, Aldo Morelli e Aljoša Volčič.

I quesiti ed i problemi riguardano la logica, la probabilità, la geometria piana, solida ed analitica, l'algebra e l'aritmetica. Pur non essendo semplici, non richiedono conoscenze tecniche per permettere a tutti gli studenti, indipendentemente dal particolare corso di studi frequentato, di misurarsi su un bagaglio comune di conoscenze. Lo scopo della prova è infatti quello di selezionare i migliori non sulla base delle nozioni matematiche conosciute, ma della reale capacità di sviluppare un ragionamento matematico. A tale proposito, non era richiesta ai partecipanti un'analisi complessa e dettagliata nella soluzione dei problemi, ma soltanto una descrizione qualitativa delle procedure e dei ragionamenti da utilizzare.

Per quanto riguarda il questionario, sono stati attribuiti ad ogni risposta corretta 5 punti, ad ogni risposta errata 0 punti e ad ogni risposta non data 1,5 punti, e non più un punto come negli anni passati: questa scelta è stata presa per penalizzare, in media, la strategia di scegliere a caso per i quesiti dei quali non si conosca la risposta esatta. I problemi sono stati invece valutati su una base di 20 punti; i punteggi inferiori sono stati ottenuti nel terzo problema, mentre quelli migliori nel secondo.

La parte alta della classifica presenta molte sovrapposizioni con l'elenco dei vincitori alle Scuole Normali di Pisa e Catania, alla Scuola S. Anna di Pisa e ai Collegi Galileiano di Padova e Ghislieri e Borromeo di Pavia. Per questo motivo si sono avute numerose rinunce, e la classifica dei vincitori della borsa INdAM si è allungata fino al sessantesimo classificato, il cui punteggio è stato di 67,5 su 110. I partecipanti risultati idonei, quelli cioè che hanno ottenuto almeno la metà dei punti a disposizione, sono stati 126.

([1]) A condizione di aver superato tutti gli esami previsti dal proprio piano di studi con una media di almeno 27 e voto minimo di almeno 24.

Segnaliamo che un'analoga iniziativa, rivolta agli studenti della *laurea specialistica*, si è svolta il 30 settembre presso l'INdAM.

È inoltre da osservare come, a tutt'oggi, oltre la metà dei vincitori della borsa negli anni passati abbia ottenuto la proroga per tutta la durata del corso di studi, a testimonianza della validità della selezione effettuata, e dell'importanza di incentivare i più meritevoli a perseguire con regolarità i propri studi universitari. I bandi dell'INdAM si trovano sul sito **www.altamatematica.it**, mentre testi e soluzioni delle prove degli anni passati sono disponibili all'indirizzo **www.lemonnier.it/riviste/archimede/archimede/indam.html**.

IL TESTO DELLA PROVA

A) QUESITI

1. Di un gruppo di persone si sa che «tutti i maschi sono maggiorenni».
Se ne può dedurre che
(A) tutte le persone maggiorenni sono maschi
(B) tutte le femmine sono minorenni
(C) tutte le persone minorenni sono femmine
(D) tutte le femmine sono maggiorenni
(E) tutte le persone maggiorenni sono femmine

2. Nel piano cartesiano si tracciano le rette di equazione $y = mx + q$ ed $y = nx + p$ dove i numeri m, q, n, p vengono stabiliti lanciando quattro volte un dado non truccato (si tratta quindi di interi positivi minori o uguali a 6). Qual è la probabilità che le due rette abbiano uno e un solo punto in comune?
(A) 1/2
(B) 2/3
(C) 5/6
(D) 35/36
(E) 125/216

3. Un traghetto parte dal porto di Napoli per raggiungere quello di Palermo e, contemporaneamente, un altro traghetto parte da Palermo per Napoli. Il traghetto partito da Napoli arriva a destinazione 72 minuti prima dell'altro.
Le navi si sono incrociate quando erano a 150 km da Palermo, e a 170 km da Napoli. Supponendo che entrambe abbiano navigato a velocità costante, quanto è durata la traversata per i passeggeri sbarcati a Palermo?
(A) 8 ore e 40 minuti
(B) 9 ore
(C) 10 ore e 15 minuti
(D) 12 ore
(E) Più di un giorno

4. Se x è un numero reale positivo diverso da 1, quanti tra i numeri

$$x,\quad \frac{1}{x},\quad \frac{x}{1+x^2},\quad \frac{1+x}{2},\quad \frac{1+x}{2x}$$

sono minori di 1?

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) Dipende dal numero x

5. Consideriamo i sei vertici $V_1, V_2, \ldots, V_6$ di un esagono regolare inscritto in un cerchio C. Preso un punto P interno o sul bordo di C e diverso da ognuno dei vertici V_i, consideriamo gli angoli V_iPV_j con $i \neq j$. Al variare del punto P, l'ampiezza del più piccolo degli angoli considerati è

(A) 0°
(B) 15°
(C) 30°
(D) 60°
(E) nessuna delle precedenti

6. Dato nel piano un triangolo ABC scaleno e acutangolo, in quanti modi si può scegliere un punto D cosicché il quadrilatero $ABCD$ ammetta un asse di simmetria?

(A) Nessuno
(B) 1
(C) 3
(D) 6
(E) 9

7. Il triangolo ABC, rettangolo in A, ha le mediane uscenti da B e da C di lunghezza 3 e 4 rispettivamente. Qual è la lunghezza dell'ipotenusa BC?

(A) 5
(B) $\sqrt{10}$
(C) $2\sqrt{5}$
(D) $7\sqrt{2}$
(E) È indeterminata

8. Sia P un vertice di un cubo con lo spigolo di lunghezza 2. Siano A, B, C i punti medi dei tre spigoli uscenti da P. Il volume della piramide $ABCP$ è

(A) 1/6
(B) 1/3
(C) $1/\sqrt{3}$
(D) 1/2
(E) $\sqrt{3}/2$

9. Cinque carte con i numeri dall'1 al 5 vengono mescolate e disposte casualmente una di seguito all'altra, in modo da formare un numero di cinque cifre. La probabilità che il numero così ottenuto sia divisibile per 4 è
(A) 2/5
(B) 1/3
(C) 1/4
(D) 1/5
(E) 3/10

10. Se $x + 1/x = 4$, allora $x^3 + 1/x^3$ è uguale a
(A) $18 + 20\sqrt{3}$
(B) $30 + 10\sqrt{5}$
(C) 52
(D) $30\sqrt{3}$
(E) 64

B) PROBLEMI

1. Diciamo che due numeri interi positivi sono *imparentati* se il loro prodotto è un multiplo della loro somma.
(i) Verificare che, per ogni intero positivo n, i due numeri $n + 1$ ed $n^2 + n$ sono imparentati;
generalizzare il caso precedente trovando un numero imparentato a $n(n + m)$ per ogni coppia di interi positivi n ed m.
(ii) Dimostrare che due numeri primi fra loro non possono essere imparentati.
(iii) Sia h un intero positivo. È vero che, se a e b sono numeri imparentati, allora anche ha e hb sono imparentati?
È vero che, se ha e hb sono imparentati, allora anche a e b sono imparentati?
È vero che per ogni coppia di numeri interi positivi a e b esiste un h tale che ha e hb sono imparentati?
(iv) Dimostrare che, se due numeri a e b sono imparentati, allora $a^2 + b^2$ è un multiplo di $a + b$ e che, più in generale, $a^n + b^n$ è un multiplo di $a + b$ per ogni $n \geq 2$.

2. Un triangolo T ha i lati di lunghezza 29, 29 e 40.
(i) Calcolare l'area di T.
(ii) Trovare un altro triangolo isoscele diverso da T, con i due lati uguali di lunghezza 29, e con la stessa area di T.
(iii) Mostrare che esiste un solo triangolo isoscele, diverso da T, con i lati di lunghezza intera, e con lo stesso perimetro e la stessa area di T.

3. Il pianeta Zork ha forma cubica, ed i suoi abitanti vivono sulla superficie. Come gli uomini sulla Terra, gli Zorkiani concepiscono la distanza tra due punti del loro

pianeta come la lunghezza del più breve tragitto completamente giacente sulla superficie del pianeta che colleghi i due punti.
(i) Qual è la distanza tra i punti P e Q in figura?
(ii) Sapendo che vi sono più di due percorsi di lunghezza minima che congiungono P e Q, sapreste trovarli tutti?
(iii) Determinare i punti sull'*equatore* indicato in figura più vicini e più lontani dal punto medio S dello spigolo PR.

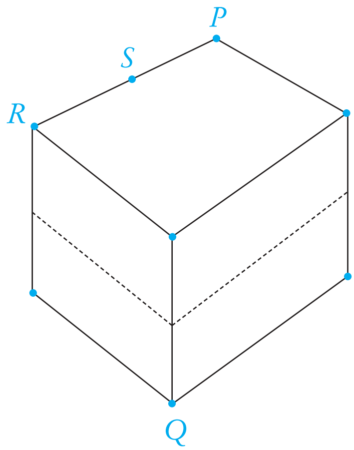

Figura 1

RISOLUZIONI

RISPOSTE AI QUESITI

1. La risposta corretta è C. Infatti, se i maschi sono tutti maggiorenni, le persone minorenni non potranno essere che femmine.
2. La risposta corretta è C.
Due rette hanno esattamente un punto in comune se e soltanto se hanno coefficienti angolari diversi, altrimenti sarebbero parallele (o in particolare coincidenti). Ci si sta chiedendo quindi quale sia la probabilità che m sia diverso da n, e questa è 5/6 (fissato m, in 5 casi su 6 possibili n coincide con m).
3. La risposta corretta è B. Le navi compiono, nel tempo che impiegano ad incontrarsi, tragitti di 150 e 170 km. Questo vuol dire che la velocità della nave partita da Napoli è 17/15 di quella della nave partita da Palermo. Il tempo totale di percorrenza dei passeggeri che arrivano a Napoli è quindi 17/15 di quello dei passeggeri che arrivano a Palermo, il che conferma che il viaggio di questi ultimi è durato meno. La differenza dei tempi di percorrenza – pari ai 2/15 della durata del viaggio Napoli-Palermo – è di 72 minuti. La durata di questo viaggio è quindi i 15/2 di 72 minuti, cioè 9 ore.
4. La risposta corretta è C. I numeri x e $1/x$ sono uno maggiore e uno minore di 1, indipendentemente dal valore di x. Lo stesso discorso vale per i numeri $(1 + x)/2$ e

$(1 + x)/2x$ che sono le medie aritmetiche tra 1 ed x e tra 1 ed $1/x$ rispettivamente. Pertanto, esattamente due di questi quattro numeri sono minori di 1, indipendentemente dalla scelta di x.
Infine, $x/(1 + x^2)$ è sempre minore di 1, perché il suo inverso $x + 1/x$ è somma di due numeri positivi, uno dei quali è necessariamente maggiore di 1.

5. La risposta corretta è C. Il valore minimo si ottiene considerando il punto P sulla circonferenza, e il minore dei due angoli alla circonferenza che insistono sul lato di un esagono regolare ha l'ampiezza di 30°.

6. La riposta corretta è D. Tre delle scelte producono un parallelogramma, mentre le altre tre forniscono un trapezio isoscele.

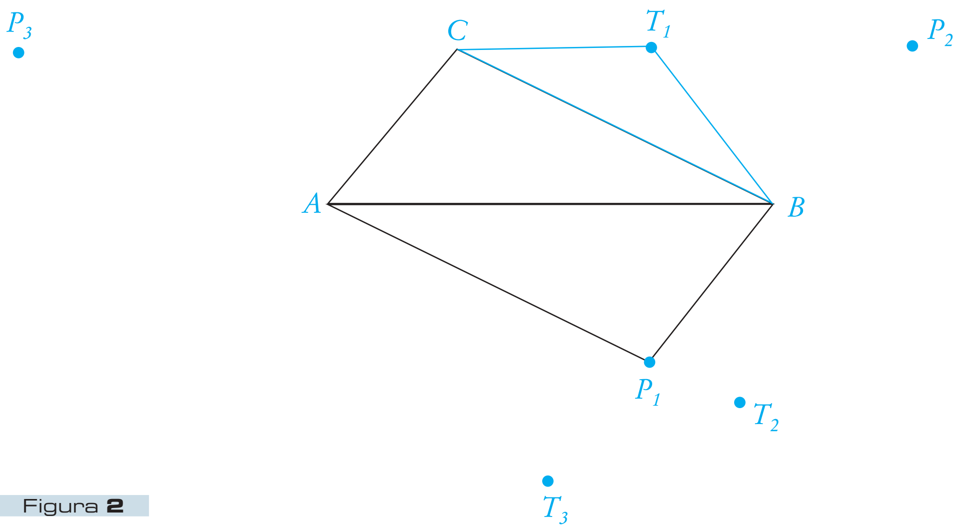

Figura **2**

7. La risposta corretta è C. Per il teorema di Pitagora applicato alle mediane, abbiamo infatti $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2/4 = 9$ e $\overline{AB}^2/4 + \overline{AC}^2 = 16$. Sommando queste identità, si ottiene $(5/4)\left(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2\right) = 25$, e quindi, sempre per il teorema di Pitagora, $\overline{BC}^2 = 20$.

8. La risposta corretta è A.
Possiamo considerare il triangolo rettangolo ABP come base e PC come altezza della piramide. L'area della base è allora 1/2, ed il volume è $(1 \cdot 1/2)/3 = 1/6$.

9. La risposta corretta è D. La divisibilità per 4 di un numero intero dipende soltanto dalle sue ultime due cifre. Le uniche possibilità per numeri le cui cifre siano 1, 2, 3, 4, 5 sono 12, 32, 52, 24, e sono quindi 4 sulle 20 possibili.

10. La risposta corretta è C. Il cubo di $x + 1/x$ è uguale alla somma di $x^3 + 1/x^3$ e di $3(x + 1/x)$. Questo mostra che $x^3 + 1/x^3 = 4^3 - 3 \cdot 4 = 52$.

RISOLUZIONI DEI PROBLEMI

Problema 1

(i) Due numeri sono imparentati se la loro somma divide il loro prodotto. La somma di $n+1$ ed n^2+n è $(n+1)^2$, mentre il loro prodotto è $n(n+1)^2$.
Si verifica allo stesso modo che $m(n+m)$ ed $n(n+m)$ sono imparentati.
(ii) Se a e b sono imparentati, allora $a+b$ divide ab, e perciò divide anche $a^2=a(a+b)-ab$ e $b^2=b(a+b)-ab$. Quindi $a+b\geq 1$ divide sia a^2 che b^2, che non possono perciò essere primi tra loro.
Ma allora anche a e b non sono primi tra loro.
(iii) Se ab è un multiplo di $a+b$, allora $h^2ab=(ha)(hb)$ è sicuramente un multiplo di $h(a+b)=ha+hb$.
Il viceversa non è vero: 3 e 6 sono imparentati, mentre 1 e 2 non lo sono.
È invece vero che per ogni coppia di numeri interi positivi a e b esiste un h tale che ha e hb siano imparentati.
Infatti affinché $h(a+b)$ divida h^2ab è sufficiente scegliere $h=a+b$.
(iv) Possiamo scrivere $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$; quindi se $a+b$ divide ab, allora divide anche a^2+b^2.
Lo stesso argomento si applica ad a^n+b^n che può essere scritto come differenza tra $(a+b)^n$ ed un opportuno multiplo di ab.

Problema 2

(i) Chi non ricorda la formula di Erone, può applicare il teorema di Pitagora: la lunghezza della mediana che divide il triangolo in due parti uguali è $\sqrt{29^2-20^2}=$ $=\sqrt{441}=21$. Allora l'area vale $(40\cdot 21)/2=420$.

(ii) È sufficiente accostare lungo il cateto minore i due triangoli rettangoli in cui abbiamo diviso il triangolo T nella parte (i). Si ottiene un triangolo i cui lati sono 29, 29 e 42, e la cui area è chiaramente la stessa.

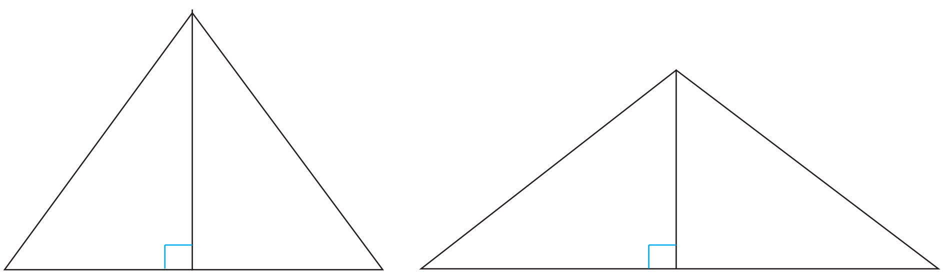

Figura 3

(iii) Sia b la lunghezza dei due lati uguali e $2a$ quella della base. Allora l'altezza rispetto alla base vale $\sqrt{b^2-a^2}$ e quindi l'area è $a\sqrt{b^2-a^2}$. Se sia il perimetro che l'area devono essere uguali a quelli di T, avremo $a+b=49$ e $a\sqrt{b^2-a^2}=420$.

Elevando al quadrato la seconda equazione si ottiene $a^2(b+a)(b-a)=420^2$. Sostituendo $b=49-a$, si ha $2a^3-49a^2+3600=0$. Di questa equazione conosciamo già la soluzione $a=20$, e possiamo dividere per $a-20$ ottenendo $2a^2-9a-180=0$.
Le altre soluzioni sono perciò 12 e –15/2: il valore di b corrispondente ad $a=12$ è $b=37$, che fornisce un triangolo isoscele di lati 37, 37 e 24. La soluzione $a=-15/2$ non è positiva, e non interessa.

Problema 3

(i) Tra due punti sulla superficie del cubo esistono due distanze differenti: la prima è la minima lunghezza di una curva che li congiunga, completamente contenuta nella superficie del cubo; la seconda è la lunghezza del segmento di linea retta, generalmente non contenuto nella superficie del cubo, che li congiunge. In tutto ciò che segue chiameremo «distanza geodetica» la prima, e «distanza spaziale» la seconda. Una geodetica sarà invece ogni curva tra i due punti la cui lunghezza sia pari alla distanza geodetica. Chiaramente, la distanza geodetica di due punti sul cubo è sempre maggiore o uguale alla distanza spaziale tra gli stessi due punti.
Tuttavia, le due distanze coincidono se i punti A e B si trovano su una stessa faccia del cubo: il segmento di linea retta che li congiunge è completamente contenuto in tale faccia. Pertanto la curva spazialmente più conveniente è anche quella geodeticamente più breve.
Nel nostro caso però, i punti P e Q non appartengono ad una stessa faccia. Osserviamo a questo punto che delle sei facce del cubo, tre contengono P e le altre tre contengono Q. Fissiamo una geodetica che congiunge P a Q, e consideriamo un punto X in cui esce dalle prime tre facce per entrare nelle altre tre. P e X appartengono alla stessa faccia, e quindi la maniera più breve di arrivare da P a X rimanendo sulla superficie del cubo è il segmento PX: concludiamo quindi che la porzione di geodetica che congiunge P a X coincide con il segmento PX.
Ragionando allo stesso modo, si conclude che anche la porzione di geodetica che congiunge X a Q coincide con il segmento XQ. In particolare vediamo che la curva giace nelle sole due facce contenenti P, X e Q. È sufficiente osservare ora come la curva più breve congiungente due punti, tra quelle contenute in due facce adiacenti del cubo, si ottenga facilmente tracciando una linea retta sullo «sviluppo» del cubo, come l'immagine in figura 4 mostra chiaramente.

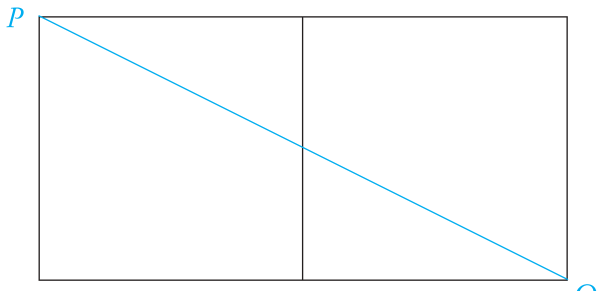

Figura 4

È a questo punto facile determinare la distanza tra i punti P e Q della domanda, che è pari a $\sqrt{5}$ volte lo spigolo L del cubo.
(ii) Tuttavia, la congiungente di lunghezza minima non è unica. Nella figura 5 sono illustrate le sei possibilità che realizzano tale distanza minima.

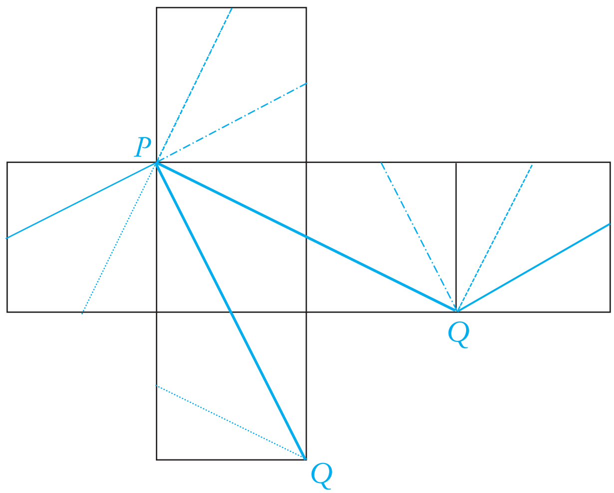

Figura **5**

(iii) Abbiamo già visto come la distanza geodetica dg(A, B) tra due punti A e B del cubo sia sempre maggiore o uguale della distanza spaziale ds(A, B) tra gli stessi due punti.
Questa semplice osservazione risolve la prima parte della domanda. In effetti, la ricerca del punto più vicino ad S, tra quelli che giacciono sull'equatore, è immediata se ci riferiamo alla distanza spaziale: il punto più vicino è il piede H della verticale tracciata da S.

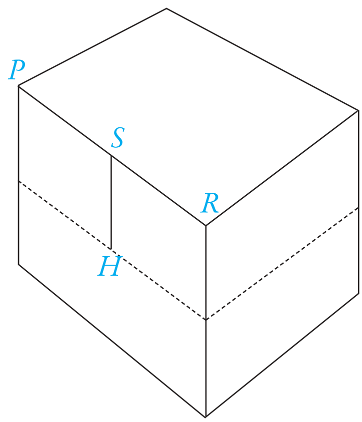

Figura **6**

I punti S ed H appartengono alla stessa faccia, e quindi la loro distanza geodetica coincide con la distanza spaziale. Se X è un altro qualsiasi punto dell'equatore, avremo allora:

$$\mathrm{dg}(S, X) \geq \mathrm{ds}(S, X) > \mathrm{ds}(S, H) = \mathrm{dg}(S, H).$$

Stabilire quali siano i punti più lontani è più complesso. Iniziamo con alcune osservazioni preliminari: innanzitutto la particolare simmetria del problema – ovvero della superficie cubica – fornisce alcune semplificazioni. Sia X un punto dell'equatore, e consideriamo una curva γ che congiunga S ad X. Se la curva γ scende «al di sotto» dell'equatore, sostituiamo tali porzioni di γ con le loro simmetriche rispetto al piano contenente l'equatore: otterremo una curva γ' completamente al di sopra dell'equatore, e della stessa lunghezza di γ. Questo mostra che è lecito supporre che le geodetiche che congiungono S a punti dell'equatore si trovino al di sopra dello stesso.

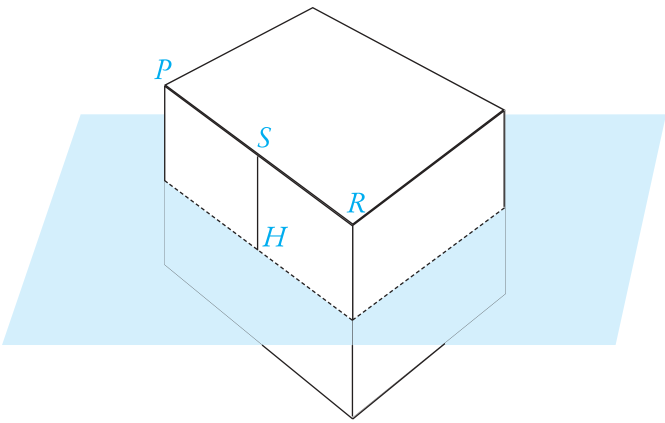

Figura 7

In secondo luogo, la simmetria del problema rispetto al piano passante per S che divide il cubo in due parallelepipedi uguali ci consente di considerare solamente i punti al di qua del piano (la distanza da S dei punti simmetrici rispetto al piano sarà la stessa).
Per lo stesso motivo, possiamo supporre che le geodetiche congiungenti S ad un punto sull'equatore al di qua del piano appena considerato siano completamente poste al di qua del piano.
Per quanto detto nella soluzione della parte (i), le geodetiche tra due punti che si trovano sugli spigoli del cubo sono composte da una successione di segmenti che congiungono coppie di punti che si trovano sul bordo di una stessa faccia. Possiamo limitarci a considerare geodetiche che passano soltanto per la faccia superiore e le tre facce laterali al di qua del piano mediano.
Se la faccia contenente la prima porzione di γ è quella laterale al di sotto di S, l'aspetto di γ nello sviluppo del cubo sarà come in figura 8.

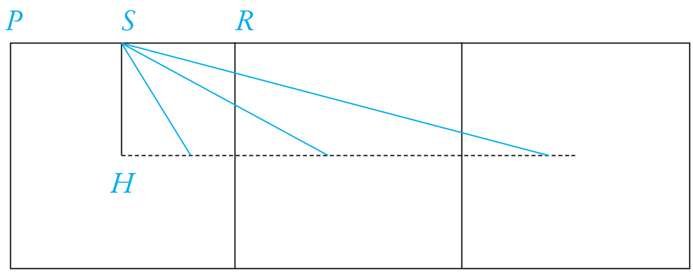

Figura 8

Se invece la prima faccia è quella superiore, l'aspetto di γ sarà uno tra quelli indicati in figura 9.

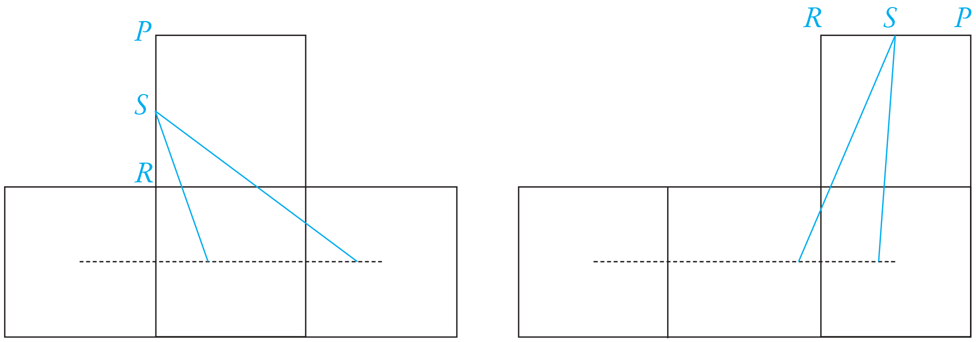

Figura 9

Osserviamo che spostando il punto sull'equatore «verso destra», la lunghezza del segmento tracciato sullo sviluppo cresce nell'immagine a sinistra, mentre decresce in quella a destra.
La distanza geodetica di S da un punto X sull'equatore è il minimo tra le lunghezze dei segmenti appena descritti. Si dovrà poi stabilire quali punti abbiano la distanza geodetica massima. Il procedimento che segue evita di dover eseguire conti: sovrapponiamo le tre immagini precedenti.

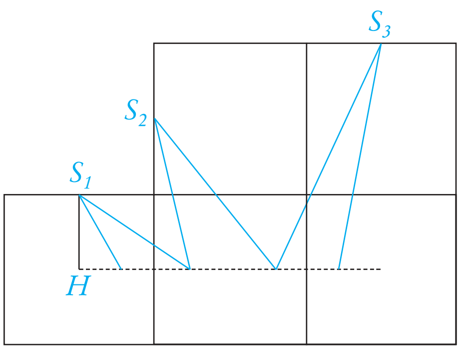

Figura 10

Tracciamo gli assi dei segmenti che congiungono i punti S_1 con S_2, ed S_2 con S_3 (vedi figura 11). Nel punto X_{12} di intersezione del primo asse con l'equatore, le due distanze da S_1 ed S_2 sono uguali. A «sinistra» di X_{12} è il segmento verso S_1 ad essere più breve, mentre a «destra» è quello verso S_2. Lo stesso discorso vale per i punti a sinistra e a destra di X_{23}. La geodetica per i punti a sinistra di X_{12} si ottiene considerando il segmento che li congiunge con S_1, per i punti tra X_{12} e X_{23} considerando quello verso S_2, e per i punti residui verso S_3.

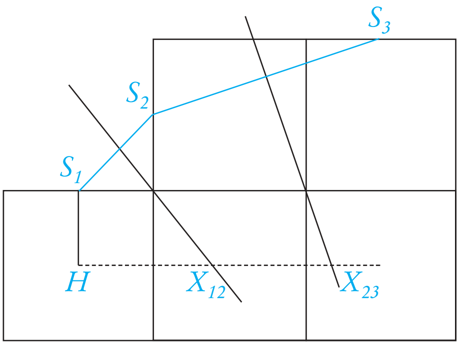

Figura 11

Osserviamo che, spostandoci lungo l'equatore verso «destra», fino ad X_{12} la distanza da S_1 aumenta. Da X_{12} a X_{23}, la distanza da S_2 aumenta ancora. Dopo X_{23}, invece, la distanza da S_3 diminuisce. Concludiamo che i punti dell'equatore geodeticamente più lontani da S sono il punto X_{23} nella porzione di equatore al di qua del piano mediano passante per S, ed il suo simmetrico rispetto a tale piano nella rimanente metà. È possibile anche calcolare la posizione del punto X_{23}: si trova ad $L/6$ dal bordo sinistro della sua faccia, e la sua distanza geodetica da S è $L\sqrt{85}/6$.

Alessandro D'Andrea
Dipartimento di Matematica
Università di Roma «La Sapienza»
dandrea@mat.uniroma1.it