BORSE DI STUDIO INDAM 2003

UN PREMIO PER GLI STUDENTI DI MATEMATICA

Anche per il 2003-2004, l'INdAM ha assegnato 50 borse di studio ad alcuni dei migliori studenti immatricolati al corso di Laurea in Matematica. La borsa ha un valore di 4000 euro ed è rinnovabile di anno in anno. Giunta alla quarta edizione, l'iniziativa sta riscontrando un successo crescente: i partecipanti sono stati 377, il numero massimo raggiunto finora. L'appuntamento è sempre meglio conosciuto tra i giovani orientati a una formazione matematica: la speranza è che possa proseguire ed affermarsi ulteriormente.

Come gli altri anni, i vincitori della borsa sono stati selezionati con una prova scritta svoltasi contemporaneamente in numerose università italiane, il 16 settembre 2003. Anche lo schema della prova è ormai abituale: 10 quesiti a risposta multipla e 3 problemi a risposta aperta. Gli argomenti coinvolti rientrano nella parte «generale» dei programmi scolastici, ossia nei temi comuni ai vari indirizzi di studio. Quindi *algebra*, *logica*, *aritmetica*, *geometria piana*, *solida e analitica*, *combinatoria e probabilità*. Lo stesso orientamento si è del resto affermato anche nelle gare matematiche perché ha il merito di non discriminare fra studenti provenienti da differenti tipi di scuole.

Gli esercizi del concorso, sia il questionario che i problemi, non presentano carattere spiccatamente tecnico o calcolistico. Piuttosto, si tratta di quesiti volti a valutare la comprensione essenziale di quanto studiato nella scuola secondaria, la capacità di fare deduzioni corrette ed usare gli strumenti fondamentali. In altre parole, *la formazione matematica di base*. Ciò è del tutto ragionevole per una prova che voglia fornire un quadro attendibile dei 50-60 partecipanti più meritevoli.

Il primo problema è un esercizio di algebra e riguarda il rapporto fra i polinomi ed i loro zeri. Il secondo è un esercizio di geometria piana contenente un problema di massimo; probabilmente il più impegnativo dei tre, si è prestato a risoluzioni con tecniche di vario genere: trigonometriche, analitiche e sintetiche. Il terzo si presenta come un problema di geometria analitica, tuttavia in esso intervengono anche questioni aritmetiche (divisibilità fra interi).

La commissione giudicatrice era composta da Vincenzo Ancona, Claudio Bernardi, Piermarco Cannarsa, Paolo Gronchi, Pierangelo Marcati (Presidente), Aldo Morelli, Edoardo Sernesi.

I punteggi sono stati, in media, lievemente migliori che negli anni passati. Su 377 partecipanti, sono stati 171 (55 femmine e 116 maschi) a raggiungere almeno 56 punti (dei 110 punti disponibili, secondo i criteri precisati all'inizio del testo della prova). Fra i problemi, risultati nettamente superiori si sono avuti nel primo, mentre gli altri due hanno dato esiti simili.

Per la cronaca, il 50° classificato ha totalizzato 79.8 punti su 110.

Gli articoli pubblicati su «Archimede» riguardanti le gare del 2000, del 2001 e del 2002, rispettivamente di R. Tortora, P. Gronchi e A. Morelli, sono nei numeri 1/2001, 1/2002 e 2/2003, nonché sul sito della rivista: **www.lemonnier.it**, voce *Riviste* e poi «Archimede».

Informazioni su queste borse di studio e sulle prossime edizioni, compresi i bandi di concorso, si possono trovare sul sito dell'INdAM: **http://indam.mat.uniroma1.it**.

IL TESTO DELLA PROVA

La prova consiste in dieci quesiti a risposta multipla ed in tre problemi di cui si richiede lo svolgimento. Per quanto riguarda i quesiti a risposta multipla, una ed una sola tra le cinque risposte è esatta e sono assegnati 0 punti per ogni risposta sbagliata, 1 punto per ogni risposta non data e 5 punti per ogni risposta esatta. Per ciascuno dei problemi viene assegnato un punteggio da 0 a 20.

La durata della prova è di tre ore.

A) I QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

1. Si consideri l'equazione $(10^{12}+25)^2-(10^{12}-25)^2=10^x$. Allora:
(A) $x=12$
(B) $x=14$
(C) $x=16$
(D) l'equazione non ammette alcuna soluzione
(E) esiste più di una soluzione

2. Quante sono le terne di numeri interi positivi consecutivi tali che il quadrato del maggiore è la somma dei quadrati degli altri due?
(A) Nessuna
(B) Una
(C) Due
(D) Tre
(E) Infinite

3. Si considerino due triangoli equilateri di lati a e b. Determinare il lato di un terzo triangolo equilatero la cui area è data dalla somma delle aree dei primi due.
(A) $a+b$

(B) $\sqrt{a^2+b^2}$
(C) $(a+b)/2$
(D) $2(a+b)$
(E) $(a+b)\sqrt{3}$

4. Siano A, B, C tre punti allineati dello spazio, con B compreso fra A e C. Sia S_1 la sfera di diametro AB, sia S_2 la sfera di diametro BC e sia S la sfera di diametro AC. Sapendo che la superficie di S ha area quadrupla rispetto a S_1, qual è il rapporto fra i volumi di S e di S_2?
(A) 2
(B) 4
(C) 8
(D) $2\sqrt{2}$
(E) $\sqrt{5}$

5. Nel gioco del lotto vengono estratti successivamente 5 numeri compresi fra 1 e 90, ogni volta senza rimettere nell'urna i numeri precedentemente estratti. Assumiamo come definizione di probabilità di un evento il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al verificarsi dell'evento ed il numero dei casi possibili. Qual è la probabilità che i 5 numeri estratti nella ruota di Cagliari siano in ordine crescente oppure in ordine decrescente?
(A) 1/120
(B) 1/40
(C) 1/55
(D) 1/45
(E) 1/60

6. Si considerino due coni retti a base circolare, di altezza h e raggio di base r, posti in maniera che il vertice di ognuno coincida con il centro della base dell'altro. Il volume del solido intersezione dei due è:
(A) $\pi hr^2/6$
(B) $\pi hr^2/2$
(C) $\pi hr^2/4$
(D) $\pi hr^2/3$
(E) $\pi hr^2/12$

7. In una città un taxi costa 1.10 euro per ogni kilometro percorso se la velocità (in km/h) è maggiore di un certo valore x oppure 0.77 euro al minuto se la velocità è minore di x. Viaggiando a x kilometri orari i due metodi si equivalgono. Quanto vale x?
(A) 10
(B) 35

(C) 42
(D) 50
(E) 70

8. Si considerino due circonferenze concentriche tali che la somma delle lunghezze dei due raggi sia 36. Una corda AB della circonferenza di raggio maggiore è intersecata dall'altra circonferenza nei punti H e K in modo che i tre segmenti AH, HK, KB risultano della stessa lunghezza. Sapendo che la lunghezza di AB è 36, determinare la lunghezza del raggio maggiore.
(A) 22
(B) 24
(C) 28
(D) 30
(E) I dati non sono sufficienti

9. Se $4^x - 4^{x-1} = 24$, quanto vale $(2x)^x$?
(A) 25
(B) 25/2
(C) $25\sqrt{5}$
(D) 5^3
(E) 4^4

10. Un ignoto matematico ha introdotto e studiato i cosiddetti numeri «speciali». Si tratta di particolari numeri interi positivi, di cui è andata perduta la definizione. Sappiamo però che, fra le seguenti cinque affermazioni, una e una sola è sbagliata. Qual e l'affermazione sbagliata?
(A) Se un numero è pari allora è speciale
(B) Se un numero non è speciale allora non è multiplo di 3
(C) Se un numero non è speciale allora è pari
(D) Se un numero non è speciale allora è dispari
(E) Se un numero è multiplo di 3 allora è speciale

B) PROBLEMI

1. Un polinomio si dice monico se il coefficiente del termine di grado massimo è uguale ad 1.
i) Determinare il polinomio monico $f(x)$ di grado quattro tale che $f(k) = 0$ per $k = 1, 2, 3, 4$.
ii) Determinare il polinomio monico $g(x)$ di grado quattro tale che $g(k) = 1$ per $k = 1, 2, 3, 4$.
iii) Determinare il polinomio monico $h(x)$ di grado quattro tale che $h(k) = 1$ per $k = 1, 2, 3$ ed $h(4) = 4$.

2.

i) Considerate le circonferenze C_1 e C_2, tangenti fra loro esternamente nel punto A, qual è la retta passante per A che interseca C_1 e C_2 ulteriormente nei punti M ed N in modo che il segmento MN abbia lunghezza massima?

ii) Si supponga poi che le circonferenze C_1 e C_2 siano secanti e che A sia uno dei punti di intersezione. Determinare la retta passante per A che interseca C_1 e C_2 ulteriormente nei punti M ed N (con A compreso fra M ed N) in modo che la lunghezza del segmento MN sia massima.

iii) Usare il risultato precedente per costruire il triangolo equilatero di area massima circoscritto ad un dato triangolo. (Un triangolo si dice circoscritto ad un altro triangolo se ogni vertice del secondo appartiene ad un lato del primo. Si ricordi qual è il luogo dei punti P tali che l'angolo APB sia di 60°).

3. Ad ogni numero intero relativo n associamo il punto del piano P_n le cui coordinate, in un usuale sistema di riferimento cartesiano, sono (n, n^2).

i) Calcolare il coefficiente angolare della retta passante per due punti distinti $P_a = (a, a^2)$ e $P_b = (b, b^2)$.

ii) Trovare tutti i segmenti del tipo P_aP_b passanti per il punto (0, 6).

iii) Dimostrare che, per ogni punto $P_a = (a, a^2)$, esistono due punti $P_b = (b, b^2)$ e $P_c = (c, c^2)$ tali che il triangolo $P_aP_bP_c$ sia rettangolo in P_a.

iv) Dimostrare che, dati tre punti $P_a = (a, a^2)$, $P_b = (b, b^2)$, $P_c = (c, c^2)$, con $a < b < c$, l'area del triangolo $P_aP_bP_c$ è uguale a $(c - a)(c - b)(b - a)/2$.

RISOLUZIONI

RISPOSTE AI QUESITI

1. La risposta corretta è (B). Il primo membro dell'equazione vale:

$$(10^{24} + 2 \cdot 10^{12} \cdot 25 + 25^2) - (10^{24} - 2 \cdot 10^{12} \cdot 25 + 25^2)$$

cioè $2 \cdot 2 \cdot 10^{12} \cdot 25 = 10^{14}$. Quindi l'unica soluzione è $x = 14$.

2. La risposta corretta è (B). Le terne richieste sono tante quanti i numeri interi n maggiori di 1 tali che $(n + 1)^2 = n^2 + (n - 1)^2$. Sviluppando l'equazione, si ottiene $n^2 - 4n = 0$, la cui unica soluzione intera maggiore di 1 è 4. La terna corrispondente è (3, 4, 5) che, pertanto, è l'unica terna pitagorica costituita da numeri consecutivi.

3. La risposta corretta è (B). L'area di un triangolo equilatero di lato l è data da αl^2, con $\alpha = \sqrt{3}/4$. Pertanto, detto c il lato del triangolo richiesto nel quesito, per ipotesi si ha $\alpha c^2 = \alpha a^2 + \alpha b^2$, ovvero $c^2 = a^2 + b^2$, da cui segue $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Il quesito riguarda, in sostanza, la nota generalizzazione del teorema di Pitagora, in cui si sostituiscono ai quadrati figure ordinatamente simili costruite sui lati di un triangolo rettangolo.

4. La risposta corretta è (C). Dato che la superficie di S ha misura quadrupla di S_1, segue che S ha raggio doppio di S_1, dunque B è il punto medio di AC. Il volume di S è 8 volte il volume di S_2.
5. La risposta corretta è (E). I 5 diversi numeri estratti possono presentarsi in $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ ordini differenti, tutti ugualmente probabili. Fra tali ordinamenti, 2 sono quelli nell'evento considerato; pertanto la probabilità richiesta è $2/120 = 1/60$.
6. La risposta corretta è (E). Tale solido è unione di due coni più piccoli, la cui base comune giace sul piano equidistante dai piani delle due basi dei coni dati. Intersecando i coni con un piano passante per i vertici, si trova che ognuno dei due coni più piccoli ha base $r/2$ ed altezza $h/2$, quindi il solido intersezione ha volume:

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{\pi h r^2}{12}.$$

7. La risposta corretta è (C). Indichiamo con d la distanza percorsa (in kilometri) e con t il tempo trascorso (in minuti). Sia v la velocità richiesta (in kilometri al minuto); abbiamo che $tv = d$. Per le ipotesi, si ha $1.10\, tv = 0.77t$ per ogni t. Pertanto abbiamo che $1.10v - 0.77 = 0$ e $v = 0.7$, ovvero (in kilometri orari) $x = 60v = 42$.
8. La risposta corretta è (A). Chiamiamo R ed r i raggi (con $R > r$) e O il centro delle circonferenze. Sia G la proiezione ortogonale di O sulla retta AB, che è il punto medio di AB e di HK. Quindi $\overline{AG} = 18$ e $\overline{HG} = 6$. Dal teorema di Pitagora, applicato ai triangoli OGA e OGH, abbiamo:

$$\overline{OG}^2 = R^2 - 18^2 = r^2 - 6^2$$

e quindi $(R + r)(R - r) = 36(R - r) = 18^2 - 6^2$. Otteniamo $R - r = 8$, perciò $R = 22$.
9. La risposta corretta è (C). Abbiamo $4^x(1 - 1/4) = 24$, dunque $4^x = 32$, cioè $2^{2x} = 2^5$. Allora $x = 5/2$ e $(2x)^x = 5^{5/2} = 25\sqrt{5}$.
10. La risposta corretta è (C). La (A) e la (D) sono equivalenti, come anche la (B) e la (E). Pertanto, l'unica affermazione sbagliata deve essere la (C).

RISOLUZIONI DEI PROBLEMI

Problema 1

i) Il polinomio:

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

è l'unico con le caratteristiche richieste. Infatti è monico, ha grado 4 e si annulla per $x = 1, 2, 3, 4$. Viceversa, per il teorema di Ruffini, un polinomio che si annulli per $x = 1, 2, 3, 4$ deve avere come fattori i binomi $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$ e $x - 4$. Affin-

ché abbia grado 4, tali binomi devono comparire tutti alla prima potenza e non possono esserci altri fattori di grado positivo. Infine, affinché sia monico, non ci possono essere ulteriori costanti moltiplicative (diverse da 1).
ii) Il polinomio $g(x) - 1$ ha le stesse caratteristiche del polinomio $f(x)$ del punto precedente. Quindi il polinomio richiesto è:

$$g(x) = f(x) + 1 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 1.$$

iii) Il polinomio $h(x) - 1$ è monico, ha grado 4 e, per ipotesi, tre delle sue radici sono 1, 2 e 3. Indicando con α la sua quarta radice, possiamo scrivere:

$$h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha) + 1.$$

Ponendo la condizione $h(4) = 4$, otteniamo $6(4 - \alpha) + 1 = 4$, cioè $\alpha = 7/2$. Quindi il polinomio richiesto è:

$$h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-7/2) + 1.$$

Problema 2

i) In una circonferenza, il diametro è la corda di lunghezza massima. Quindi il segmento MN descritto nel problema (Figura 1) è massimo quando M e N sono i punti diametralmente opposti ad A in C_1 e in C_2 (segmento $M'N'$).
ii) Siano O_1 il centro di C_1 e O_2 il centro di C_2. Siano E ed F, rispettivamente, le proiezioni di O_1 e O_2 su MN. Essendo E il punto medio di MA e F il punto medio di NA, il segmento EF è la metà di MN; quindi MN è massimo quando EF è massimo.

Assumendo che gli angoli O_1O_2A e O_2O_1A siano entrambi acuti (Figura 2), ciò accade quando MN è parallelo a O_1O_2. Infatti, in caso contrario, O_1O_2 è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha un cateto uguale ad EF, dunque $EF < O_1O_2$.

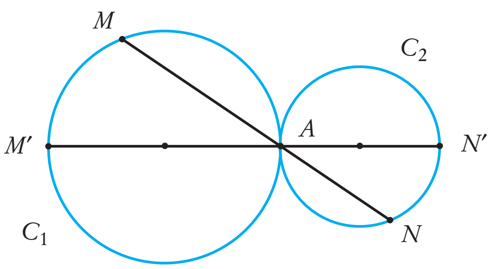

Figura 1

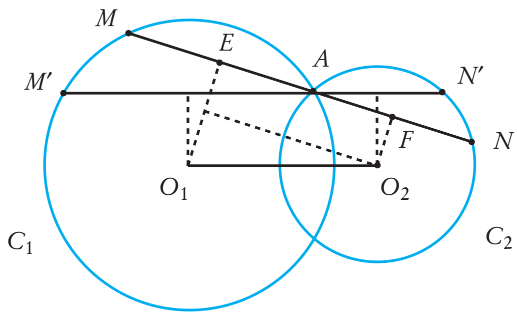

Figura 2

Supponiamo ora che uno dei due angoli O_1O_2A, O_2O_1A sia ottuso o retto, ad esempio il primo (Figura 3). Detto α l'angolo acuto tra le rette O_1O_2 e MN, si ha

$EF = O_1O_2 \cos\alpha$. Dunque MN è massimo quando $\cos\alpha$ è massimo. Si noti che in questo caso, nella configurazione corrispondente ad $\alpha = 0$ (segmento $M'N'$), il punto A non è compreso tra M ed N. Invece il valore di $\cos\alpha$ massimo, con la condizione che A sia compreso tra M ed N, si ottiene quando MN è tangente a C_2 (segmento $M''N''$). Abbiamo dunque una soluzione «estremale», nel senso che il punto A non è *strettamente* compreso tra M ed N, ma coincide con uno degli estremi.

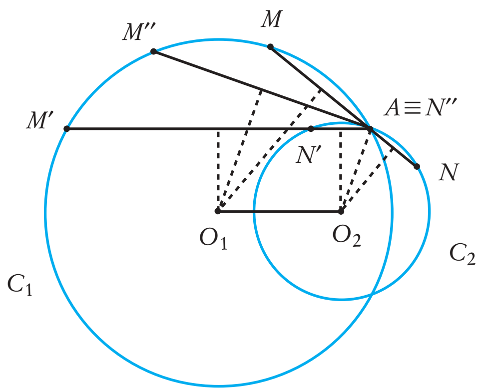

Figura 3

iii) Il luogo dei punti che vedono un segmento AB sotto un angolo di 60°, in un fissato semipiano σ dei due delimitati dalla retta AB, è l'arco che si trova in σ della circonferenza di centro O e raggio OA, dove O è il punto di σ sull'asse di AB che vede AB sotto un angolo di 120°.

Sia ABC un triangolo qualsiasi (Figura 4). Costruiamo il luogo di cui sopra per il segmento AB, dalla parte opposta rispetto a C, e per il segmento AC, dalla parte opposta rispetto a B. Otteniamo così due archi di circonferenza, rispettivamente C_1 e C_2, di centri O_1 e O_2. Un triangolo equilatero circoscritto ad ABC deve avere un lato passante per A con un estremo su C_1 e l'altro su C_2. Inoltre l'area del triangolo è massima quando è massima la lunghezza del suo lato.

In base al precedente punto ii), tra tutti i segmenti passanti per A con gli estremi su C_1 e C_2, ha lunghezza massima quello parallelo a O_1O_2 (possiamo sempre supporre di essere nel caso rappresentato in Figura 2, eventualmente rinominando i vertici del triangolo). Sia MN tale segmento, con $M \in C_1$ e $N \in C_2$. Sia infine K il punto di intersezione tra le rette MB e NC.

Per costruzione, il triangolo MNK è equilatero, dato che ha tre angoli di 60°, è circoscritto ad ABC e, tra tutti i triangoli con queste caratteristiche, è quello di area massima.

Per una trattazione più generale riguardante questo tipo di problemi geometrici, suggeriamo la lettura dell'articolo di B. Scimemi «Inscrivere e circoscrivere», apparso su «Archimede» n. 3/1999.

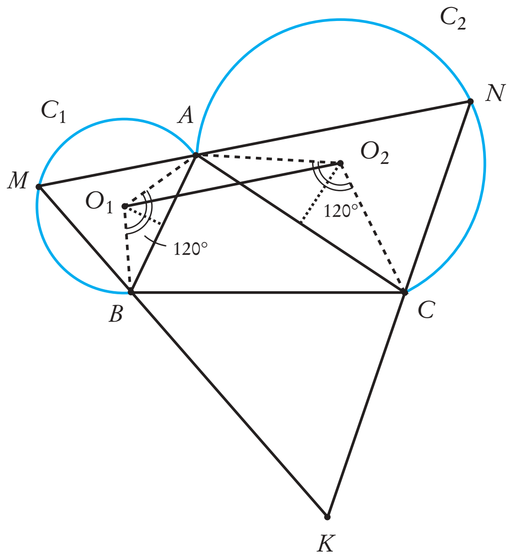

Figura 4

Problema 3

i) Il coefficiente angolare, se $a \neq b$, è dato da:

$$\frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b + a)(b - a)}{b - a} = a + b.$$

ii) La retta passante per P_a e P_b ha equazione:

$$y = (a + b)x - ab.$$

Essa passa per (0, 6) se e solo se $ab = -6$. Osserviamo che, quando ciò accade, il punto (0, 6) è interno al segmento P_aP_b. Dunque a e b, essendo interi, devono essere divisori di 6. I segmenti cercati sono pertanto quattro, ovvero $P_{-6}P_1$, $P_{-3}P_2$, $P_{-2}P_3$ e $P_{-1}P_6$ (Figura 5).

iii) In base al punto i), l'angolo $P_bP_aP_c$ è retto se e solo se:

$$(a + b)(a + c) = -1.$$

Dato a, basta scegliere $b = -a - 1$ e $c = -a + 1$ (che sono interi, se a lo è) ed il triangolo corrispondente è rettangolo in P_a (Figura 6).

iv) Siano Q_a, Q_b, Q_c le proiezioni ortogonali di P_a, P_b, P_c sull'asse x (Figura 6). Notiamo che, se $a < b < c$, allora il punto P_b è all'interno del trapezio $P_aQ_aQ_cP_c$, data la convessità della parabola di equazione $y = x^2$, sulla quale giacciono tutti i punti P_n.

Pertanto, l'area richiesta si può ottenere sottraendo all'area del trapezio $P_aQ_aQ_cP_c$ le aree dei trapezi $P_aQ_aQ_bP_b$ e $P_bQ_bQ_cP_c$. Dunque l'area del triangolo risulta:

$$\begin{aligned}
&(a^2+c^2)(c-a)/2-(a^2+b^2)(b-a)/2-(b^2+c^2)(c-b)/2 \;=\\
&= (a^2c-ac^2-a^2b+ab^2-b^2c+bc^2)/2 \;=\\
&= (ac(a-c)+b(c^2-a^2)+b^2(a-c))/2 \;=\\
&= (c-a)(-b^2+(a+c)b-ac)/2 \;=\\
&= (c-a)(b-a)(c-b)/2.
\end{aligned}$$

Allo stesso risultato si perviene anche in altri modi, ad esempio attraverso il calcolo di un determinante:

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}b-a & b^2-a^2\\ c-a & c^2-a^2\end{pmatrix}\right|$$

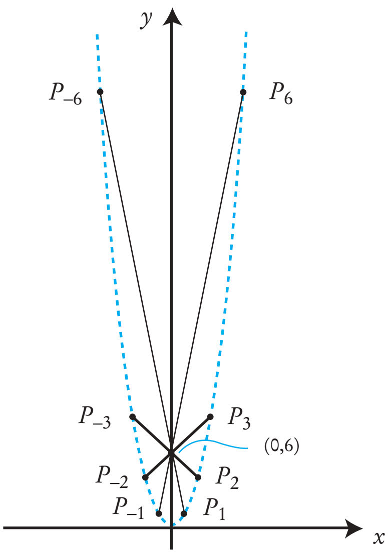

Figura 5

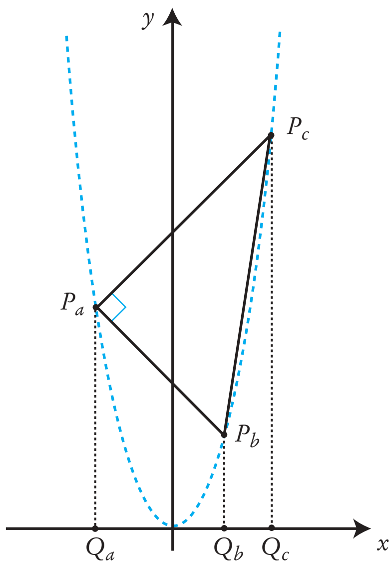

Figura 6

Paolo Francini
Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici
Università di Roma «La Sapienza»
paolo.francini@uniroma1.it

Federico Incitti
Dipartimento di Matematica
Università di Roma «La Sapienza»
incitti@mat.uniroma1.it