LA PROVA DEL CONCORSO A BORSE DI STUDIO DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA

Il giorno 12 settembre 2000 si è svolta presso molte sedi universitarie italiane la prova di concorso per le borse di studio messe a disposizione dall'Istituto Nazionale di Alta Matematica, come riferito in un articolo del prof. Alessandro Figà-Talamanca in questo stesso numero di *Archimede*.

La prova consisteva in 10 quesiti a risposta multipla e 4 problemi. I candidati avevano 3 ore di tempo per fornire le risposte ai quesiti e la soluzione argomentata dei problemi. Il punteggio è stato fissato da un'apposita Commissione dell'INdAM, nel modo seguente: per ogni quesito, 5 punti in caso di risposta esatta, 1 punto in caso di risposta mancante, 0 punti in caso di risposta errata o multipla; per ogni problema da 0 a 15 punti.

In questo articolo si presentano i quesiti e i problemi assegnati, le risposte esatte ai quesiti con brevi note e possibili risoluzioni dei problemi. Seguono alla fine alcuni brevi commenti generali sull'andamento delle prove.

Un dovuto ringraziamento va da parte mia a quelli tra i membri della Commissione dell'INdAM (Paolo Gronchi, Aldo Morelli, Fabio Podestà), che hanno contribuito con indicazioni e suggerimenti alla redazione di questo lavoro.

Trascrivere i testi delle prove e indicarne le soluzioni, oltre che essere una testimonianza dell'iniziativa e un riscontro per quanti hanno partecipato al concorso, può servire di aiuto a quegli studenti che si cimenteranno in successive edizioni dello stesso. Un suggerimento a tutti i lettori interessati, e che peraltro colloca questo scritto nella tradizione di *Archimede*, è di provare a risolvere quesiti e problemi resistendo alla tentazione di leggere subito le soluzioni, che per questa ragione sono riportate nella seconda parte dell'articolo.

1. IL TESTO DELLA PROVA

A. Quesiti a risposta multipla

1. Una torre è vista, dal limite di un fossato che la circonda, sotto un angolo di 60°. Indietreggiando di 100 metri, essa è vista sotto un angolo di 30°; quanto è alta?

   (A) meno di 60 metri
   (B) fra 60 e 70 metri
   (C) fra 70 e 80 metri
   (D) fra 80 e 90 metri
   (E) più di 90 metri

2. Le facce di un parallelepipedo rettangolo misurano 24, 32 e 48 cm^2. Qual è il suo volume in cm^3?

(A) 144
(B) 192
(C) 36864
(D) un valore diverso dai precedenti
(E) non è possibile determinare il volume

3. Una circonferenza C è tangente ai due lati di un angolo retto ed ha raggio r. Un'altra circonferenza di raggio minore è tangente agli stessi lati ed a C. Qual è il raggio di questa seconda circonferenza?

(A) $(\sqrt{2}-1)r$
(B) $(2-\sqrt{2})r$
(C) $(3\sqrt{2}-4)r$
(D) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})r$
(E) $(3-2\sqrt{2})r$

4. Se n è un intero positivo, il numero $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$

(A) è sempre divisibile per 24
(B) è sempre divisibile per 30
(C) possiede al massimo quattro fattori primi distinti
(D) è compreso tra n^4 ed n^5
(E) è sempre un quadrato perfetto

5. Su un tavolo ci sono 6 scrigni; su ognuno di essi c'è un'iscrizione.

- Sul primo scrigno l'iscrizione dice:
  «nessuno di questi 6 scrigni contiene un tesoro».
- Sul secondo scrigno l'iscrizione dice:
  «1 solo di questi 6 scrigni contiene un tesoro».
- Sul terzo scrigno l'iscrizione dice:
  «2 soli di questi 6 scrigni contengono un tesoro».
- Sul quarto scrigno l'iscrizione dice:
  «3 soli di questi 6 scrigni contengono un tesoro».
- Sul quinto scrigno l'iscrizione dice:
  «4 soli di questi 6 scrigni contengono un tesoro».
- Sul sesto scrigno l'iscrizione dice:
  «5 soli di questi 6 scrigni contengono un tesoro».

Sapendo che ciascuno scrigno contiene un tesoro se e solo se l'iscrizione su di esso dice il vero, in quali scrigni c'è un tesoro?

(A) in nessuno scrigno

(B) in tutti gli scrigni
(C) nel primo scrigno
(D) nel secondo scrigno
(E) nel sesto scrigno

6. In una circonferenza AD è un diametro, O il centro, AC una corda e B un suo punto. Si ha: $ABO = 60°$, $COD = 60°$ e la misura di OB è 5. Quanto misura BC?
(A) $5\sqrt{2}$
(B) 5
(C) $2\sqrt{3}$
(D) 4
(E) non si può rispondere: i dati sono insufficienti

7. Quanti valori interi relativi si possono dare a t affinché l'equazione $x^2 - 5x - t = 0$ abbia due radici intere relative?
(A) 1 valore
(B) 2 valori
(C) 4 valori
(D) infiniti valori
(E) nessun valore

8. Per quanti valori dell'intero positivo n l'espressione $\dfrac{3n+41}{n-5}$ è un intero positivo?
(A) 1
(B) 4
(C) 8
(D) infiniti
(E) nessuno

9. Un triangolo ha per vertici tre degli otto vertici di un cubo di lato unitario. Quanto è al massimo il perimetro del triangolo?
(A) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$
(B) $3\sqrt{3}$
(C) $3\sqrt{2}$
(D) $\sqrt{3}+2\sqrt{2}$
(E) nessuna delle risposte precedenti

10. Qual è il più grande numero intero minore di $\sqrt{n^2 - 2n}$ se $n = 12345654321$?
(A) 12345654314

(B) 12345654315
(C) 12345654318
(D) 12345654319
(E) 12345654320

B. Problemi

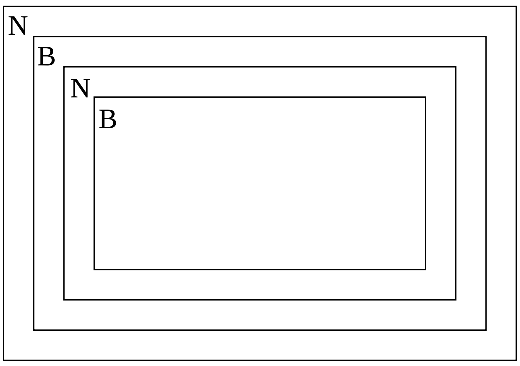
1. Si considerino tre rette r, s, t sul piano.

(i) Si può affermare che esiste sempre un triangolo ABC tale che r, s, t siano rispettivamente gli assi dei lati AB, BC, CA?

(ii) Supposto che le tre rette r, s, t passino per uno stesso punto e che r ed s siano perpendicolari tra loro, si costruisca un triangolo ABC soddisfacente la condizione detta.

(iii) Nelle ipotesi di (ii), supposto che t formi con r un angolo di 60°, si determini il triangolo ABC avente l'area uguale a $\sqrt{3}u^2$, ove u è l'unità di misura.

2. Si vuole pavimentare una stanza rettangolare di dimensioni ignote con mattonelle quadrate di 30 cm di lato, di due colori B ed N, realizzando il disegno in figura (in cui la parte centrale è un rettangolo di colore B ed è circondata da tre cornici rispettivamente di colori N, B ed N). Le tre cornici devono avere tutte la stessa larghezza di una mattonella, e si vuole che il numero totale delle mattonelle impiegate di colore B sia uguale al numero delle mattonelle di colore N. Determinare i possibili valori di tale numero e le corrispondenti dimensioni possibili della stanza.



3. Tra tutti i triangoli contenuti in un quadrato assegnato, quali sono quelli di area massima? Quali quelli di perimetro massimo?

4. Il polinomio $x^3 + ax^2 - 6ax + b$, dove a, b sono numeri reali, ammette tre radici reali non nulle, a due a due distinte ed in progressione geometrica.

(i) Provare che 6 è una radice del polinomio e determinare b.

(ii) Trovare i possibili valori di a.

2. SOLUZIONI

A. Quesiti a risposta multipla

1. La risposta esatta è (D). Sia AB la torre (Figura 1); se l'angolo ADB misura 60° e quello in C 30°, l'angolo ABC misura 60° e gli angoli DBA e DBC misurano entrambi 30°, per cui il triangolo CDB è isoscele (da cui $|CD| = |BD|$), e il triangolo DBA è metà di un triangolo equilatero. La sua altezza $|BA|$ è uguale a $\frac{\sqrt{3}}{2}|BD|$. Essendo $|BD| = |CD| = 100$ m, risulta $|BA|$ circa uguale a 86,6 m.

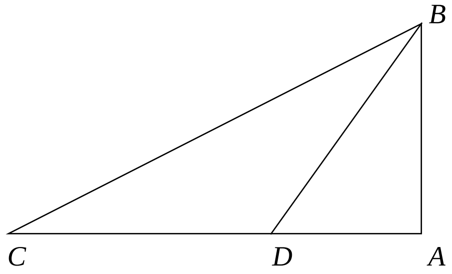


Figura 1

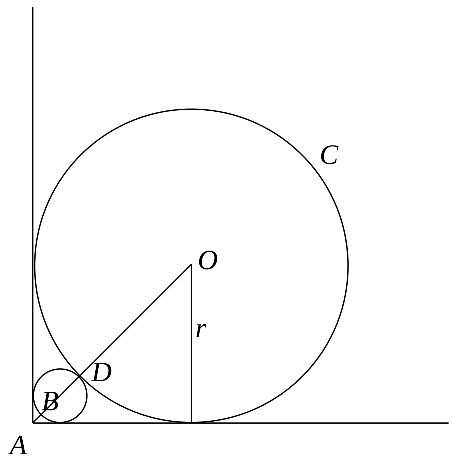


Figura 2

2. La risposta esatta è (B). Dette a, b, c, le misure dei lati del parallelepipedo e V il suo volume, si ha $ab = 24$, $bc = 32$ ed $ac = 48$. Moltiplicando membro a membro le tre uguaglianze si ottiene $a^2b^2c^2 = V^2 = 36864$, da cui $V = 192$. Per evitare il calcolo della radice quadrata, basta fattorizzare 24, 32 e 48: si ottiene $V^2 = 2^{12} \times 3^2$, da cui $V = 2^6 \times 3 = 192$. Ovviamente si può procedere anche in altri modi.

3. La risposta esatta è (E). Siano (Figura 2) O il centro della circonferenza C, A il vertice dell'angolo, D il punto di tangenza delle due circonferenze e B l'altro punto in cui la retta AO incontra la circonferenza minore. Si ha: $|OA| = r\sqrt{2}$ e $|AD| = (\sqrt{2} - 1)r$. Detto x il raggio del cerchio piccolo, si ha, analogamente, $|AB| = (\sqrt{2} - 1)x$, da cui $|AD| = |AB| + |BD| = (\sqrt{2} - 1)x + 2x = (\sqrt{2} + 1)x$.
Uguagliando le due espressioni di $|AD|$ si ricava $x = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} r = (3 - 2\sqrt{2})r$.

4. La risposta esatta è (A). Infatti di quattro numeri naturali consecutivi, uno è certamente multiplo di 4 e un altro di 2, ed uno almeno è multiplo di 3: pertanto il loro prodotto è divisibile per 24. La risposta (B) è sbagliata per ragioni analoghe (ciascuno dei quattro numeri potrebbe non dividere 5). Per escludere la (C), osservato che i fattori primi del prodotto $n(n+1)(n+2)(n+3)$ includono tutti i fattori primi di n, basta prendere $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ perché la proprietà sia falsa. La proprietà indicata nella (D) vale effettivamente per tutti gli n maggiori di 3, ma non vale per 1, per 2 e per 3. Per escludere la (E), basta scegliere $n = 1$, ed il prodotto vale 24, che non è un quadrato perfetto.

5. La risposta esatta è (D). Infatti le varie iscrizioni sono a due a due incompatibili e dunque al più una di esse è vera. Se fossero tutte false, sarebbe vera l'unica altra possibilità, cioè che ogni scrigno contiene un tesoro, ma questo comporterebbe che le iscrizioni dovrebbero essere tutte vere, un assurdo. Dunque una sola iscrizione è vera, ed un solo scrigno contiene un tesoro, come appunto è indicato sul secondo scrigno.

6. La risposta esatta è (B). L'angolo CAD (Figura 3) è la metà dell'angolo COD in quanto insistono sullo stesso arco CD ed il primo ha il vertice sulla circonferenza, il secondo nel centro. Dunque l'angolo CAD misura 30°. Ma l'angolo ABO misura 60°, dunque il triangolo ABO è rettangolo in O. Pertanto l'angolo BOC, differenza tra l'angolo retto BOD e l'angolo COD, misura 30°. Poiché anche l'angolo OCA misura 30° in quanto uguale all'angolo OAC nel triangolo isoscele OAC, il triangolo BOC risulta isoscele e dunque $|BC| = |BO| = 5$.

7. La risposta esatta è (D). Nell'equazione $x^2 - 5x - t = 0$ il prodotto delle due radici è $-t$ e la somma è 5. Detta a una delle due radici, l'altra è $5 - a$, e si ottiene $t = a(a-5)$, quindi t può assumere infiniti valori.

8. La risposta esatta è (C). Affinché il valore di $\frac{3n+41}{n-5}$ sia positivo, essendo sempre positivo il numeratore, occorre che sia $n - 5 > 0$. Conviene poi scrivere la frazione $\frac{3n+41}{n-5}$ come $\frac{3(n-5)+56}{n-5} = 3 + \frac{56}{n-5}$: affinché il suo valore sia intero, $n-5$ deve essere un divisore di 56, positivo per quanto detto sopra, cioè uno dei numeri 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56. Quindi n può essere uno dei numeri 6, 7, 9, 12, 13, 19, 33, 61.

9. La risposta esatta è (C). Mostriamo che di triangoli, come richiesti nel quesito, ce ne sono solo di tre tipi, a seconda che abbiano due, uno o nessun lato coincidenti con spigoli del cubo. Nel primo caso due lati del triangolo sono necessariamente due spigoli consecutivi del cubo e il terzo lato è una diagonale

della faccia da essi individuata: il perimetro è $2+\sqrt{2}$. Nel secondo caso il terzo vertice del triangolo appartiene allo spigolo del cubo opposto a quello coincidente con un lato del triangolo, i cui due altri lati saranno una diagonale del cubo e una diagonale di una faccia: il perimetro è $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Nel terzo caso non possono essere vertici del triangolo due vertici opposti del cubo (perché ogni altro vertice del cubo è collegato ad uno di essi da uno spigolo): dunque tutti i lati del triangolo sono diagonali di facce del cubo, ed il perimetro è $3\sqrt{2}$. Il più piccolo dei tre perimetri è $2+\sqrt{2}$, mentre $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}<3\sqrt{2}$, in quanto $1+\sqrt{3}<2\sqrt{2}$ (come si ricava o da un calcolo approssimato o confrontando i due quadrati: $(1+\sqrt{3})^2 = 4+2\sqrt{3} < (2\sqrt{2})^2 = 8$).

10. La risposta esatta è (D). Infatti, essendo $n \geq 2$, si ha

$$\sqrt{n^2-2n} < \sqrt{n^2-2n+1} = |n-1| = n-1 \quad \text{e} \quad \sqrt{n^2-2n} = \sqrt{n(n-2)} > n-2.$$

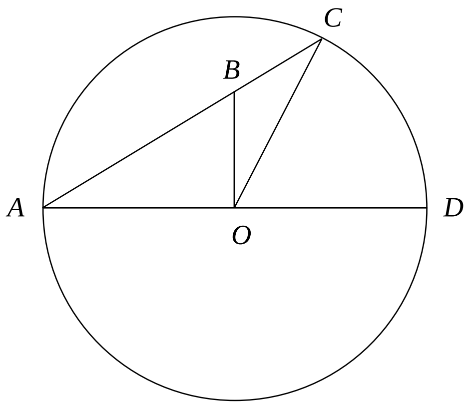


Figura 3

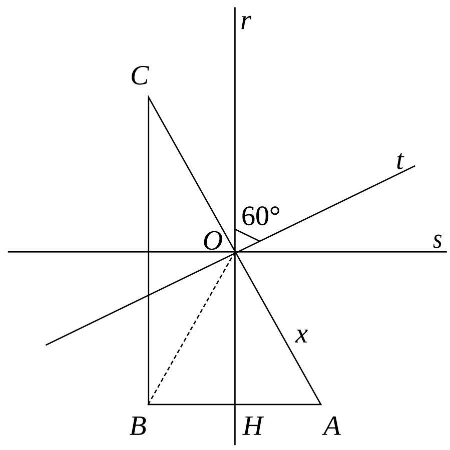


Figura 4

B. Problemi

1. (i) No. Condizione necessaria perché tre rette siano gli assi dei lati di un triangolo è che esse si incontrino in un punto, centro del cerchio circoscritto al triangolo (circocentro).

(ii) Se r ed s sono perpendicolari tra loro, anche i lati AB e BC lo sono (Figura 4) e il triangolo ABC è rettangolo. Il punto O di intersezione di r ed s, per il quale passa anche t, è il punto medio dell'ipotenusa AC. Quindi A e C sono sulla retta per O perpendicolare a t e per ogni punto A di questa retta, distinto da O, si trova un triangolo soddisfacente la condizione posta, in cui A è un vertice: il vertice B è il simmetrico di A rispetto ad r ed il vertice C è il simmetrico di A rispetto a t (o anche di A rispetto ad O o di B rispetto alla retta s).

(iii) Se l'angolo fra t ed r è di 60°, l'angolo AOH (Figura 4) risulta di 30°, essendo formato dalla retta r e dalla retta AC perpendicolare a t. Ne segue che il triangolo OAB è equilatero, e si ha $|AB| = |OA|$. Inoltre $|BC| = 2|OH|$. Detta allora x la misura di OA rispetto all'unità u, si ha $|AB| = x$ e $|BC| = x\sqrt{3}$. L'area del triangolo ABC è $\dfrac{x^2\sqrt{3}}{2}$ e affinché sia uguale a $\sqrt{3}$, occorre che sia $x = \sqrt{2}$. Ciò individua il triangolo richiesto.

2. Osserviamo preliminarmente che da un rettangolo di dimensioni x ed y, aggiungendo una cornice di larghezza 1 si ottiene un secondo rettangolo di dimensioni $x + 2$ ed $y + 2$, e che l'area della cornice, ottenuta come differenza delle aree dei due rettangoli, è data da $2x + 2y + 4$.

Ciò premesso, si indichino con a e b i numeri di mattonelle (di colore B) dei lati della regione interna della stanza. Si ottiene:

– ab come numero delle mattonelle di tale regione;
– $2a + 2b + 4$ come numero di mattonelle (N) della prima cornice;
– $2(a + 2) + 2(b + 2) + 4 = 2a + 2b + 12$ come numero di mattonelle (B) della seconda cornice;
– $2(a + 4) + 2(b + 4) + 4 = 2a + 2b + 20$ come numero di mattonelle (N) della terza cornice.

In totale occorrono $ab + 2a + 2b + 12$ mattonelle di colore B e

$$4a + 4b + 24 \tag{1}$$

mattonelle di colore N. Uguagliando i due numeri si ha: $ab - 2a - 2b - 12 = 0$, relazione (ovviamente) simmetrica nelle incognite a e b.

Ricavando a in funzione di b, si ha:

$$a = \frac{2b + 12}{b - 2} \quad . \tag{2}$$

Una prima conseguenza è che deve essere $b > 2$. Peraltro questa relazione poteva essere dedotta anche dall'osservazione del disegno, in quanto per $b = 1$ o $b = 2$ la zona interna della stanza risulta più piccola della prima cornice, e poiché la seconda cornice è più piccola della terza, a tali valori di b non può certamente corrispondere un numero di mattonelle di colore B uguale al numero di mattonelle di colore N.

Scrivendo la (2) nella forma $a = \dfrac{2(b-2)+16}{b-2} = 2 + \dfrac{16}{b-2}$, le soluzioni si ottengono per i valori di b per i quali $b - 2$ divide 16. Ora i divisori di 16 sono 1, 2, 4, 8, 16. Ad essi corrispondono i valori di b : 3, 4, 6, 10, 18. Per a si ricavano in corrispondenza i valori 18, 10, 6, 4 e 3.

Il numero n delle mattonelle di colore N occorrenti (uguale al numero di mattonelle di colore B) si ottiene sostituendo nella (1) i valori trovati di a e b. Risulta:

Per $a = 18$ e $b = 3$, e per $a = 3$ e $b = 18$, $n = 108$;
per $a = 10$ e $b = 4$, e per $a = 4$ e $b = 10$, $n = 80$;
per $a = 6$ e $b = 6$, $n = 72$.

Per trovare le dimensioni della stanza, basta osservare che le mattonelle dei lati della terza cornice sono in numero di $a + 6$ e $b + 6$, e quindi 24 e 9, 16 e 10 oppure 12 e 12. Tenendo conto della lunghezza (30 cm) del lato delle mattonelle, si ottengono le tre possibili coppie di dimensioni della stanza: $7{,}2 \text{ m} \times 2{,}7 \text{ m}$; $4{,}8 \text{ m} \times 3 \text{ m}$; $3{,}6 \text{ m} \times 3{,}6 \text{ m}$.

3. La risposta alla prima domanda è che l'area massima di un triangolo contenuto in un quadrato è la metà dell'area del quadrato: i triangoli di tale area sono tutti e soli quelli che hanno un lato in comune col quadrato ed il terzo vertice sul lato opposto del quadrato. Per dimostrarlo si deve provare che, dato il quadrato $KLMN$, preso per comodità con lato unitario, ogni triangolo contenuto in esso ha area minore o uguale a $\frac{1}{2}$.

Sia ABC un triangolo contenuto nel quadrato (Figura 5). Consideriamo le tre rette parallele a KL e passanti rispettivamente per i punti A, B, C (se due di esse coincidono, il ragionamento continua a valere, anche se qualche lunghezza o area potrà valere zero). Almeno una delle tre rette incontra tutti e tre i lati del triangolo (quella nel mezzo, per intenderci): supponiamo che sia quella passante per A, e sia D la sua intersezione col lato BC. L'area del triangolo ABC è uguale alla somma delle aree dei due triangoli ABD e ADC. Siano BE e CF le altezze di questi due triangoli rispetto alla base comune AD. Osserviamo che $|AD| \le 1$ e che $|BE| + |CF| \le 1$. Ne segue:

$$\text{Area}(ABC) = \text{Area}(ABD) + \text{Area}(ADC) = \frac{1}{2}|AD|\left(|BE| + |CF|\right) \le \frac{1}{2}.$$

L'uguaglianza peraltro sussiste se e solo se il lato BC coincide con ML ed il vertice A appartiene al segmento KN.

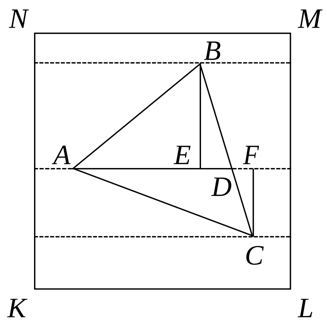


Figura 5

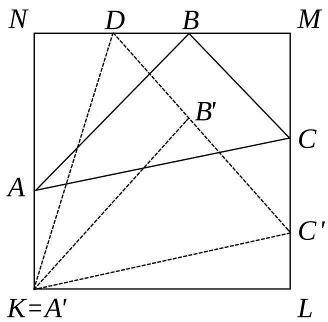


Figura 6

La risposta alla seconda domanda del problema è: i triangoli di perimetro massimo sono tutti e soli quelli che hanno per vertici tre dei quattro vertici del quadrato. Occorre dimostrare, sempre con riferimento al quadrato $KLMN$ di lato 1, che un qualunque triangolo in esso contenuto ha perimetro minore o uguale di $2+\sqrt{2}$, che è il perimetro del triangolo KLM.

Osserviamo preliminarmente che, facendo uso della disuguaglianza triangolare, si ricava facilmente che, se un triangolo ABC è propriamente contenuto in un triangolo DEF, allora il suo perimetro è minore di quello di DEF. Pertanto possiamo limitarci a considerare solo triangoli con vertici sul bordo del quadrato.

Possiamo inoltre supporre che uno dei vertici di un tale triangolo ABC coincida con uno dei vertici del quadrato. Infatti, in caso contrario (Figura 6), esisterà almeno un lato del quadrato, KL ad esempio, che ha distanza positiva dal triangolo. Traslando il triangolo ABC nella direzione ortogonale a KL, fino a che uno dei vertici del triangolo coincida con K o con L, si ottiene un triangolo $A'B'C'$ congruente a quello dato, interno al quadrato e con un vertice coincidente con un vertice del quadrato. Se uno degli altri due vertici non si trova più sul bordo del quadrato, basterà prolungare il lato $A'B'$ o $C'B'$, e ottenere così un altro triangolo (nel caso in figura $A'DC'$) contenente propriamente $A'B'C'$, dunque di perimetro maggiore e soddisfacente ai requisiti fissati.

Supponiamo dunque che A coincida con K. Se B e C appartengono allo stesso lato, ad esempio LM, allora il triangolo ABC è chiaramente contenuto in ALM, ed in questo caso la tesi è verificata. Assumiamo dunque che B stia sul lato MN e C su LM (Figura 7). Prolunghiamo il lato AN di un segmento NP ed il lato KL di un segmento LQ, con $|NP| = |LQ| = 1$, come in figura. La retta BC incontrerà almeno uno dei segmenti KP, KQ; supponiamo che essa intersechi KP nel punto D. Si ottiene:

$$\begin{aligned}|AB| + |BC| &= |PB| + |BC| \le |PD| + |DB| + |BC| = \\ &= |PD| + |DC| \le |PD| + |DN| + |NC| = |PN| + |NC|.\end{aligned}$$

Quindi il perimetro del triangolo ANC è maggiore o uguale a quello di ABC. Adesso, osserviamo che il triangolo QNC è sicuramente contenuto o nel triangolo QNM (come in figura) oppure nel triangolo QNL e che questi triangoli hanno lo stesso perimetro. In entrambi i casi possiamo concludere che $|NC| + |QC| + |NQ| \le |NM| + |QM| + |NQ|$, da cui $|NC| + |AC| \le |NM| + |AM|$. Pertanto abbiamo provato, come volevamo, che:

$$\text{perimetro } (ABC) \le \text{perimetro } (ANC) \le \text{perimetro } (ANM),$$

e che l'uguaglianza si ha se e solo se A, B e C sono vertici del quadrato.

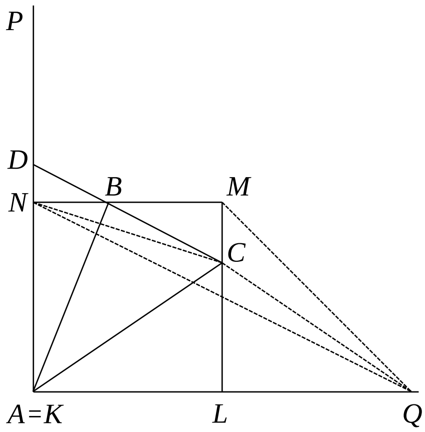


Figura 7

4. Le tre radici del polinomio, essendo in progressione geometrica, possono essere espresse come q, qk, qk^2, per opportuni numeri reali non nulli q e k. Poiché tali radici sono a due a due distinte, abbiamo che k è diverso da ± 1. Ricordiamo ora che il coefficiente a di x^2 è uguale all'opposto della somma delle radici, il coefficiente $-6a$ di x è pari alla somma dei prodotti delle radici prese a due a due, mentre il termine noto b è l'opposto del prodotto delle tre radici. Abbiamo quindi le seguenti uguaglianze:

$$-a = q + qk + qk^2 = q(1 + k + k^2) \tag{3}$$
$$-6a = q^2k + q^2k^2 + q^2k^3 = q^2k(1 + k + k^2) \tag{4}$$
$$-b = q^3k^3 \tag{5}$$

(Tali uguaglianze possono essere ottenute imponendo che il polinomio dato coincida con il polinomio $(x - q)(x - qk)(x - qk^2)$).

Notiamo che $1 + k + k^2$ è sempre diverso da zero qualunque sia k (infatti il discriminante dell'equazione $1 + k + k^2 = 0$ è negativo); segue dalla (3) che anche a è diverso da zero. Dividendo membro a membro le uguaglianze (3) e (4) otteniamo $6 = qk$, e dunque 6 è una delle tre radici del polinomio dato. Il valore di b si ottiene dalla (5) ponendo $qk = 6$, cioè $b = -6^3 = -216$. Per trovare i possibili valori di a, si sostituisce $q = \dfrac{6}{k}$ nella (3) e si ha $-ak = 6(1 + k + k^2)$, ovvero $6k^2 + (6 + a)k + 6 = 0$. Perché tale equazione nell'incognita k abbia soluzioni reali, deve essere $(6 + a)^2 \geq 4 \cdot 36$, cioè $|6 + a| \geq 12$, ovvero $a \geq 6$ oppure $a \leq -18$; inoltre $k \neq \pm 1$ implica che $a \neq 6$ e $a \neq -18$. Quindi deve essere $a > 6$ oppure $a < -18$.

3. ESITO DELLE PROVE

I testi dei quesiti e dei problemi presentati dovrebbero mostrare come l'intento della Commissione dell'INdAM sia stato piuttosto quello di verificare il «talento» matematico dei candidati, piuttosto che le loro conoscenze scolastiche. Infatti per essi ci si è ispirati allo stile delle gare di matematica che a vario titolo e a vario livello si svolgono in Italia e all'estero. Per quanto riguarda la scelta degli argomenti, ci si è limitati a quelli che figurano nei programmi di tutte le scuole superiori, allo scopo di non privilegiare gli studenti di quelle in cui si fa più matematica. In particolare si è voluto dare un po' di spazio all'aritmetica che, nell'opinione di molti, è trascurata nelle nostre scuole superiori.

Diamo qui di seguito un breve resoconto dell'esito delle prove.

Per quanto riguarda i quesiti a risposta multipla, su un totale di 279 candidati, si è andati da un massimo di 180 risposte esatte (64,5%) al quesito n. 5 a un minimo di 80 risposte esatte (28,7%) al quesito n. 8, con una media di 135,2 risposte esatte ai vari quesiti, pari al 48,5%. In media per ogni quesito ci sono stati 52,1 candidati che non hanno fornito risposte (18,7%), con punte di 106 (38%) al quesito n. 3 e 23 al quesito n. 2 (8,2%), mentre 91,7 (32,9%) in media hanno dato risposte sbagliate, con un massimo di 158 (56,6%) al quesito n. 8 ed un minimo di 61 (21,9%) al quesito n. 5. I vari «distrattori» sono risultati nel complesso ben scelti, se è vero che su 40 solo 7 hanno ricevuto meno di 10 adesioni, mentre il più seducente di tutti è risultato il «distrattore» (D) nel quesito n. 8, scelto da ben 84 candidati (30,1%).

Il punteggio medio ottenuto per i quesiti dai 279 candidati è stato pari a 25,9, mentre 15 tra essi, pari al 5,4% sono riusciti a conquistare l'intera posta in palio di 50 punti.

Per quanto riguarda i problemi, per l'attribuzione dei punti da 0 a 15 previsti per ciascuno di essi, la Commissione ha fissato criteri che tenessero conto dell'esattezza della soluzione, della sua completezza, della presenza e della qualità delle argomentazioni prodotte. Una risposta incompleta o solo parzialmente esatta o semplici tentativi messi in atto dal candidato, che però mostrassero una qualche comprensione della situazione, sono stati comunque valutati nell'ambito dei 15 punti.

I risultati relativi ai problemi sono stati meno soddisfacenti rispetto a quelli relativi ai quesiti. In particolare solo pochi candidati hanno affrontato tutti e quattro i problemi e diversi non ne hanno discusso nessuno. Ad esempio il quarto problema è stato affrontato da poco più del 40% dei candidati. Il punteggio medio relativo ai quattro problemi è risultato il seguente: 5,9 per il primo, 3,6 per il secondo, 2,7 per il terzo e 2,2 per il quarto; complessivamente una media di 14,4 punti per i problemi, sui 60 punti disponibili. Un quarto del totale è decisamente poco, se confrontato ai 25,9 punti su 50 ottenuti in media per i quesiti. Ma tale media bassa è stata influenzata, come detto sopra, dalla completa assenza in molti casi di tentativi di risoluzione.

Infine, le borse di studio sono state assegnate a coloro che hanno conseguito un punteggio complessivo minimo di circa 60 punti; questo dato non tiene però conto delle possibili successive rinunce da parte di alcuni candidati.

ROBERTO TORTORA
Dipartimento di Matematica e Applicazioni
«Renato Caccioppoli»
Università Federico II di Napoli