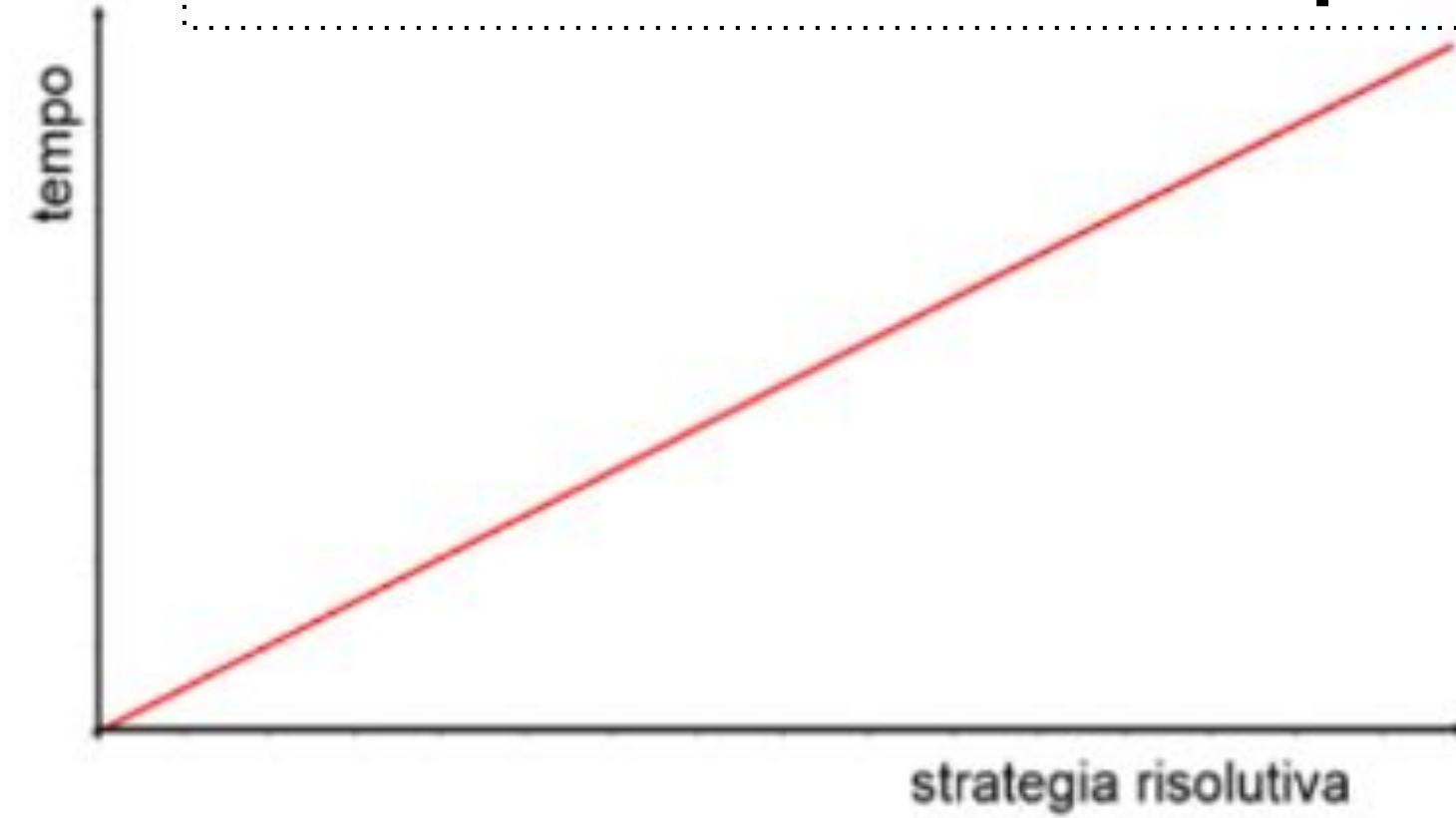


Alla scoperta dell'algebra: dalla scuola primaria alla secondaria

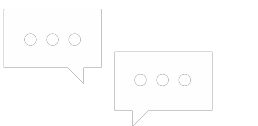
Marco Tarocco



L'idea di come si risolve un quesito



Nella realtà è necessario mutare più volte il proprio piano d'azione



WEBINAR

Completa ciascuna tabella inserendo i numeri

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Evidenzia i numeri sulla diagonale

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

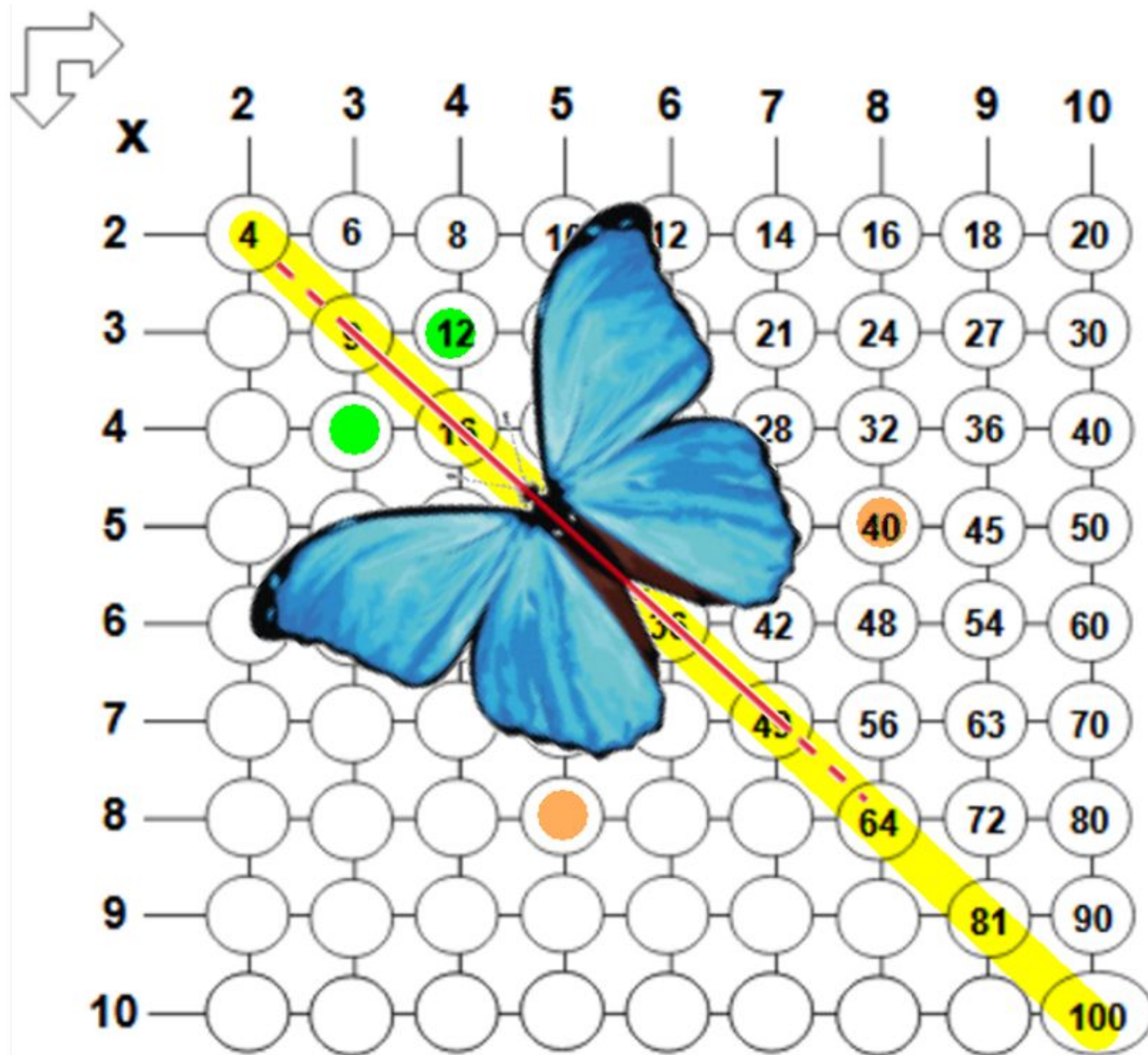
In ciascuna tabella quale caratteristica osservi nella distribuzione di numeri rispetto alla diagonale?

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20



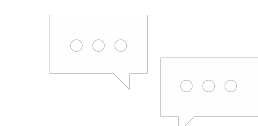
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Per quale motivo è presente un asse di simmetria?



$$3 \cdot 4 = 12 \text{ e } 4 \cdot 3 = 12$$

$$5 \cdot 8 = 40 \text{ e } 8 \cdot 5 = 40$$



WEBINAR



Questa caratteristica è in relazione all'operazione o ai numeri naturali inizialmente scelti?

$$2\,368\,556 \cdot 195 \stackrel{?}{=} 195 \cdot 2\,368\,556$$

$$43\,124\,766 + 762 \stackrel{?}{=} 762 + 43\,124\,766$$

Quante addizioni e moltiplicazioni si possono costruire?

Esprimi con una frase la proprietà osservata



WEBINAR

Procedura verbale della proprietà

Cambiando l'ordine degli addendi o dei fattori
il risultato non cambia

Cambiamento di pensiero per potenziarne le funzioni

Come si potrebbe sintetizzare con una formula matematica
questa proprietà valida per tutte le addizioni e moltiplicazioni?





Dominare le relazioni tra le informazioni favorendone l'elaborazione e la possibilità di comunicare il proprio pensiero

Presi due numeri naturali a e b si ha che

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$



WEBINAR

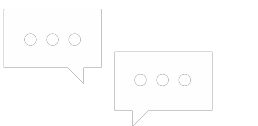
Anche nella realtà facciamo delle azioni nelle quali l'ordine è indifferente (commutano) mentre altre no



.....
Acqua calda + bustina o bustina + acqua calda
.....



.....
Calze + scarpe o scarpe + calze
.....

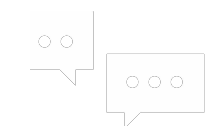
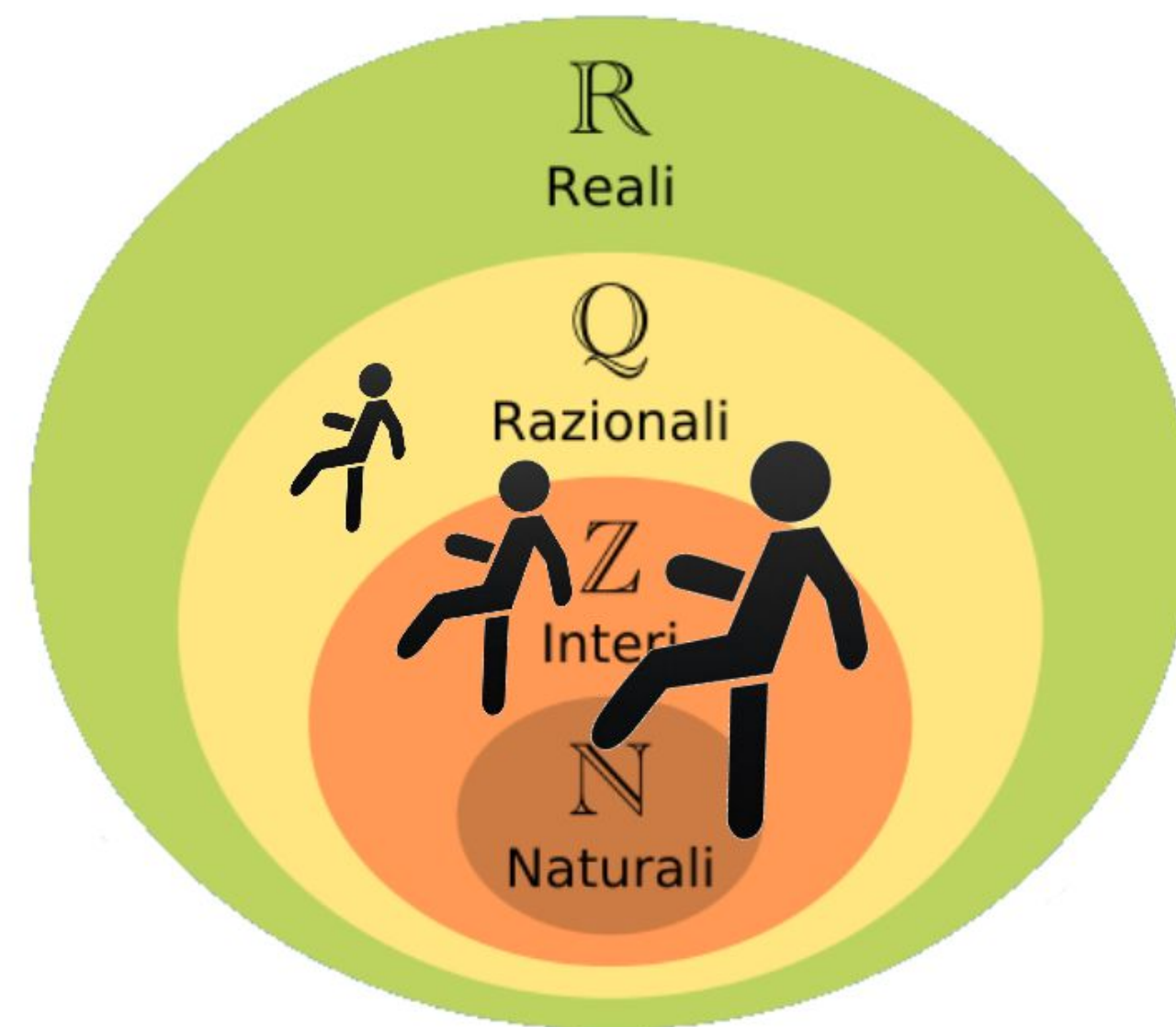


WEBINAR

Espansione della proprietà ad altri insiemi numerici

... e se i due numeri non fossero naturali?

Processo spontaneo che può condurre a modelli intuitivi errati



WEBINAR

Reiterazione del metodo?

1,1 1,2 1,5

+	1	?								
1										

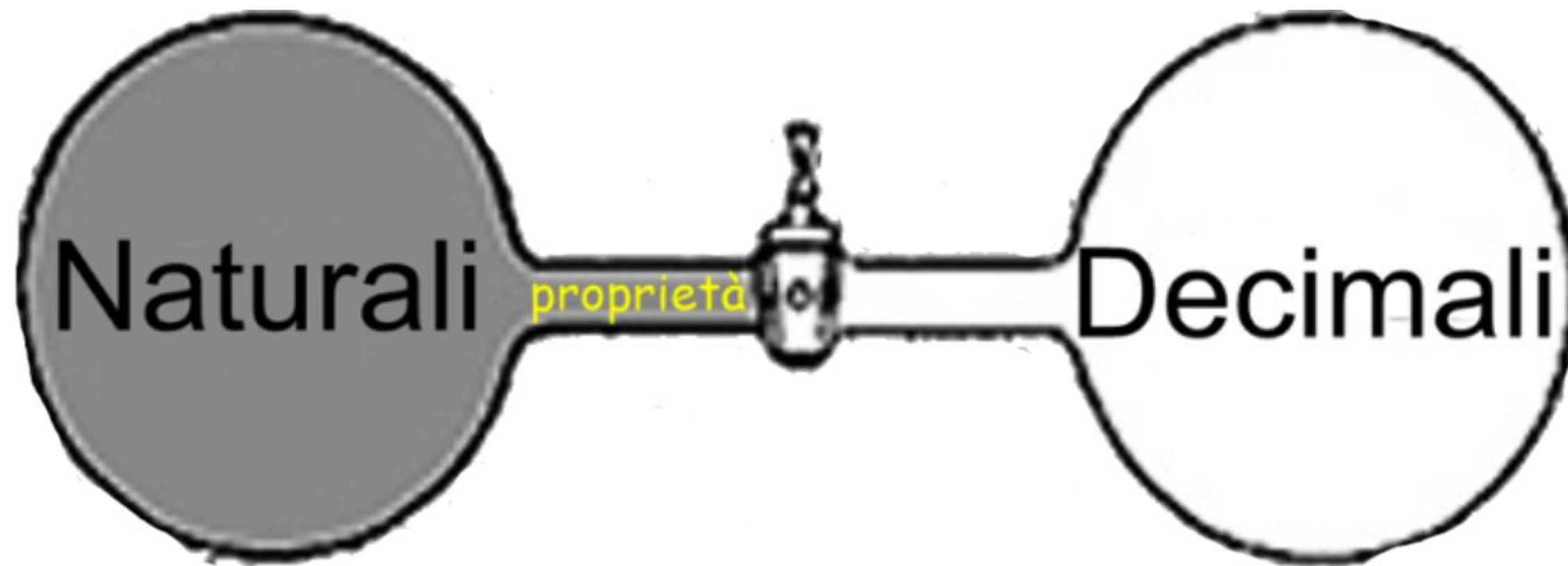
Tra 1 e 2 quanti numeri con la virgola ci sono?

Qual è tra i numeri con la virgola il successivo di 1?

Scopo della lezione/attività è che qualche alunno ponga una specifica domanda

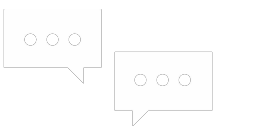
Misconcezioni inevitabili

L'idea di successivo imparato per i numeri naturali viene estesa ai razionali sia in forma di decimale sia di frazione



Dopo il 2 c'è il 3 allora il successivo di:

- 0,2 è? **0,3**
- $\frac{2}{5}$ è? **$\frac{3}{5}$**



WEBINAR

Tra due numeri decimali è possibile
fare il confronto (maggiore o minore)

$$0,4 > 0,3$$



Tra due numeri decimali ci sono
infiniti numeri decimali per cui
non esiste il successivo

Quale delle due operazioni ha come risultato il numero maggiore?

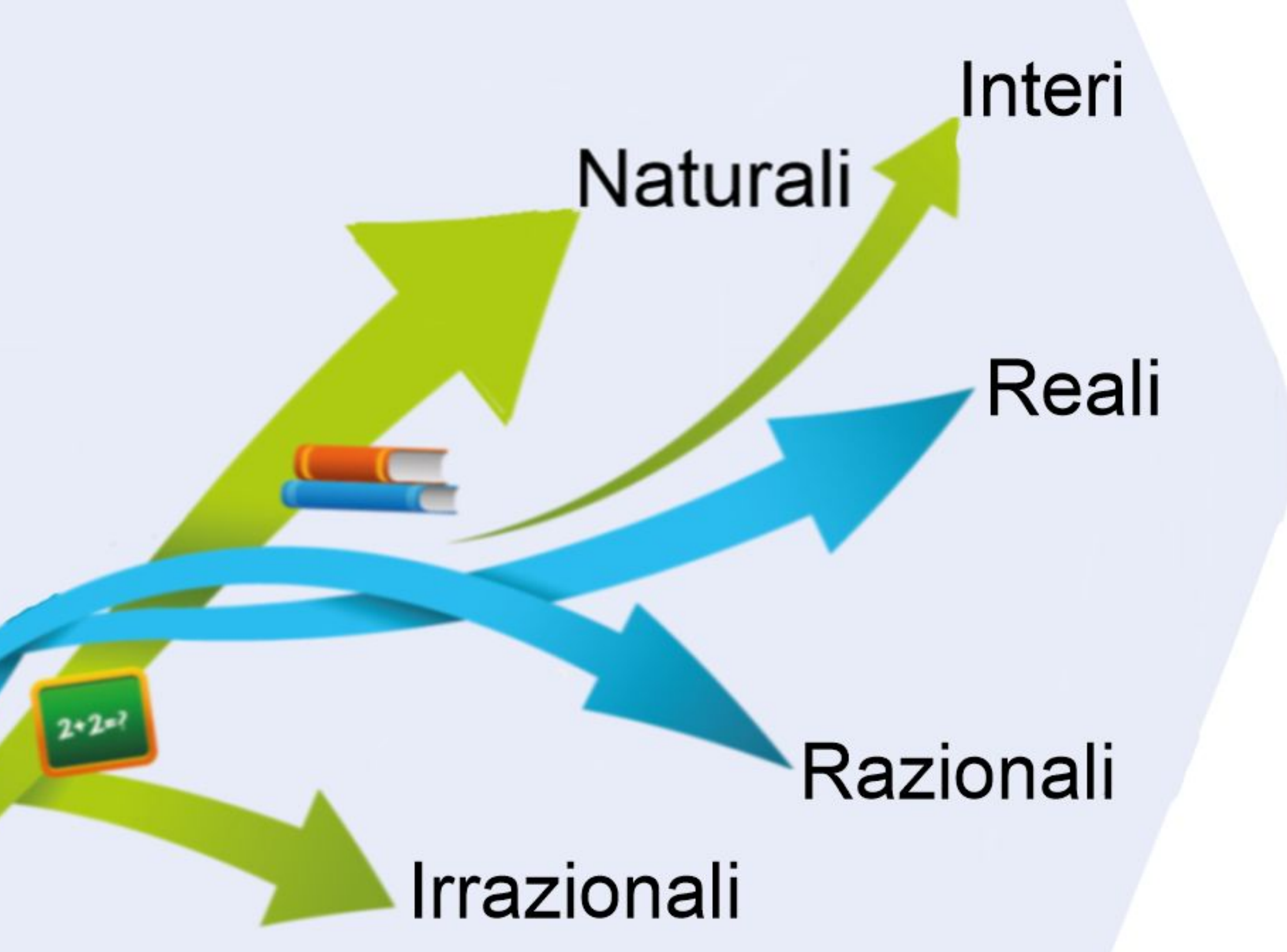
$$18 \cdot 0.25$$

$$18 : 0.25$$

- La moltiplicazione
- Hanno lo stesso risultato

- La divisione
- Non è possibile stabilirlo





Valutare se
l'esperienza
ha prodotto
un cambiamento



Affordance matematico insieme di azioni che un "oggetto" invita a compiere su di esso

Considerando l'insieme dei numeri naturali (\mathbb{N}) stabilisci se le relazioni sono VERE o FALSE.

$$a + b \geq a \quad \quad \quad \left[\] V \quad \left[\] F \quad \text{perché}$$

$$4 \cdot x \leq 10 \cdot x \quad \quad \quad \left[\] V \quad \left[\] F \quad \text{perché}$$

$$3 \cdot (x + y) > 2 \cdot (x + y) \quad \quad \quad \left[\] V \quad \left[\] F \quad \text{perché}$$

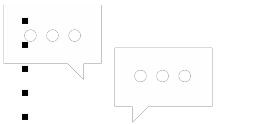
interi (\mathbb{Z})

Considerando l'insieme dei numeri naturali (~~\mathbb{N}~~) stabilisci se le relazioni sono VERE o FALSE.

$$a + b \geq a \quad \quad \quad \left[\] V \quad \left[\] F \quad \text{perché}$$

$$4 \cdot x \leq 10 \cdot x \quad \quad \quad \left[\] V \quad \left[\] F \quad \text{perché}$$

$$3 \cdot (x + y) > 2 \cdot (x + y) \quad \quad \quad \left[\] V \quad \left[\] F \quad \text{perché}$$



WEBINAR

Definizioni



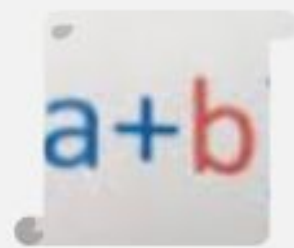
- sono parole «vuote»
- mutevoli nel tempo (storico/personale)
- sono statiche e non emozionano

Esempi

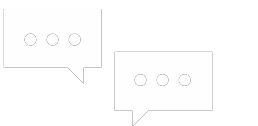


- dimenticati perchè puntiformi
- non agganciano l'esperienza al significato
- sono vincolati a un caso e non stimolano la visione complessiva

Generalizzazioni algebriche



- sono regolarità visibili dall'esperienza
- rendono umana la matematica «uomo che pensa»
- sono esportabili in altre situazioni



WEBINAR

Completa la tabella inserendo alcune terne di numeri consecutivi e calcola la somma

primo addendo	secondo addendo	terzo addendo	somma
0	1	2	3

Noti una caratteristica comune fra tutti i risultati?



WEBINAR

Completa la tabella inserendo alcune terne di numeri consecutivi e calcola la somma

primo addendo	secondo addendo	terzo addendo	somma
0	1	2	3

Noti una caratteristica comune fra tutti i risultati?

Assistenza discreta



WEBINAR

Completa la tabella inserendo alcune terne di numeri consecutivi e calcola la somma

primo addendo	secondo addendo	terzo addendo	somma
0	1	2	3

Tutti i risultati sono numeri che trovi in qualche tabellina?

Noti una caratteristica comune fra tutti i risultati?

Completa la tabella inserendo alcune terne di numeri consecutivi e calcola la somma

primo addendo	secondo addendo	terzo addendo	somma
0	1	2	3

Tutti i risultati sono numeri che trovi in qualche tabellina?

E' possibile calcolare la somma dei tre numeri con una moltiplicazione?

Noti una caratteristica comune fra tutti i risultati?

Completa la tabella inserendo alcune terne di numeri consecutivi e calcola la somma

primo addendo	secondo addendo	terzo addendo	somma
0	1	2	3

Tutti i risultati sono numeri che trovi in qualche tabellina?

E' possibile calcolare la somma dei tre numeri con una moltiplicazione?

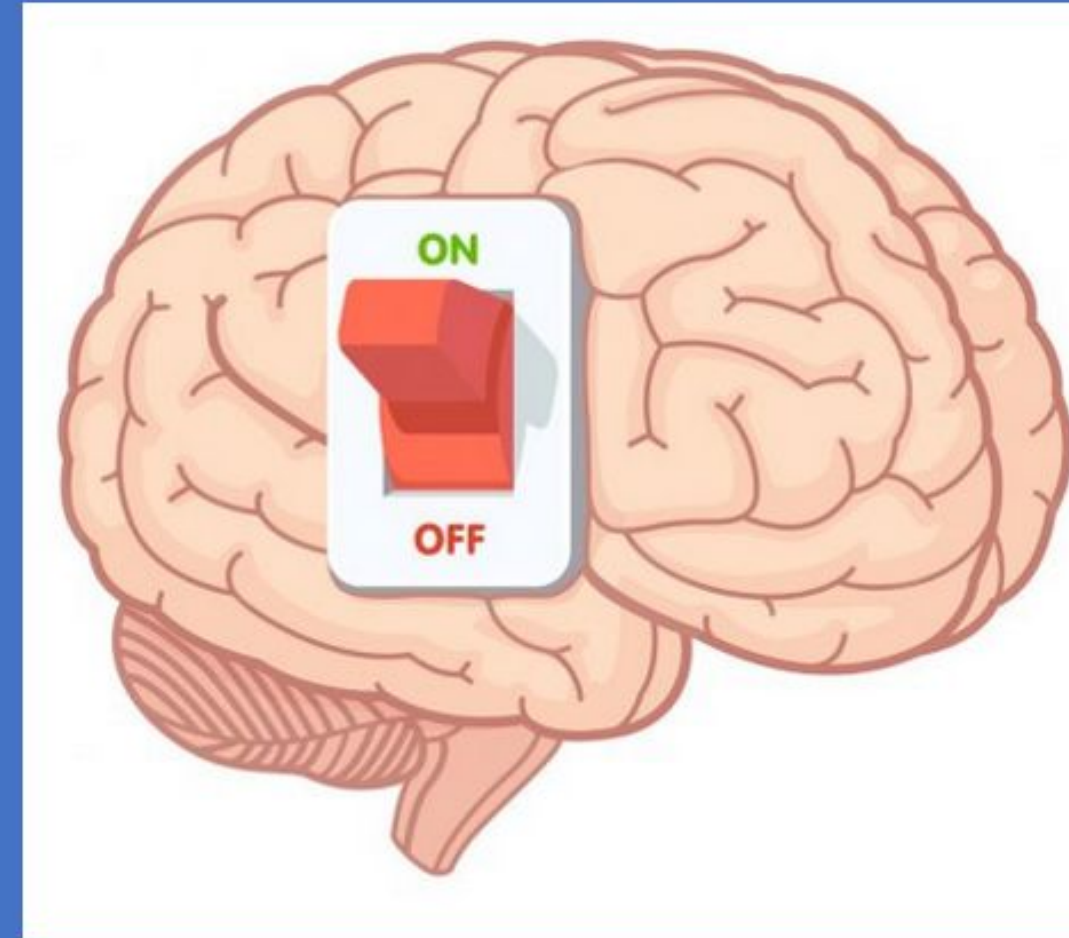
Scrivi a parole la regolarità che hai osservato

Noti una caratteristica comune fra tutti i risultati?

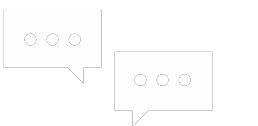
Favorire i processi di condensazione del pensiero inibendo quelli di evaporazione



La somma è sempre il triplo del termine medio

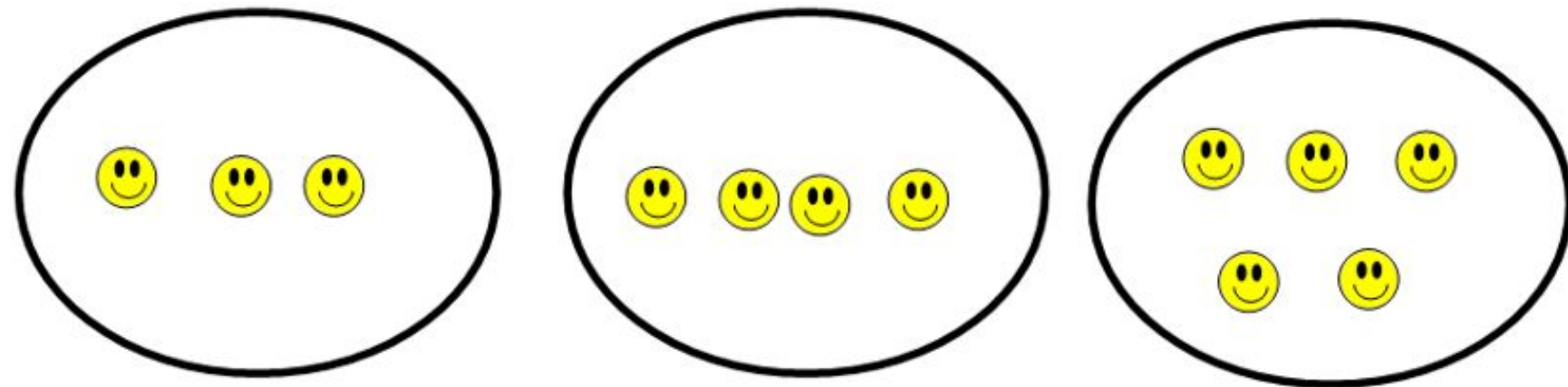


Costruisci una formula che evidenzia la scorciatoia operativa indipendentemente dai numeri iniziali

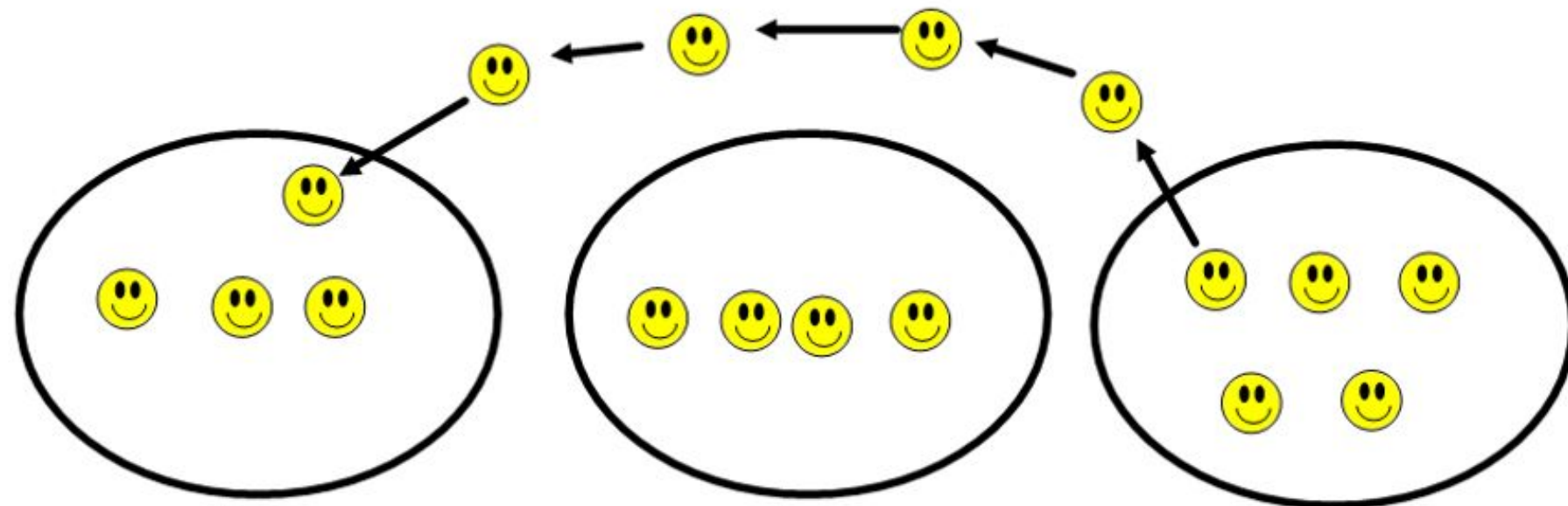


WEBINAR

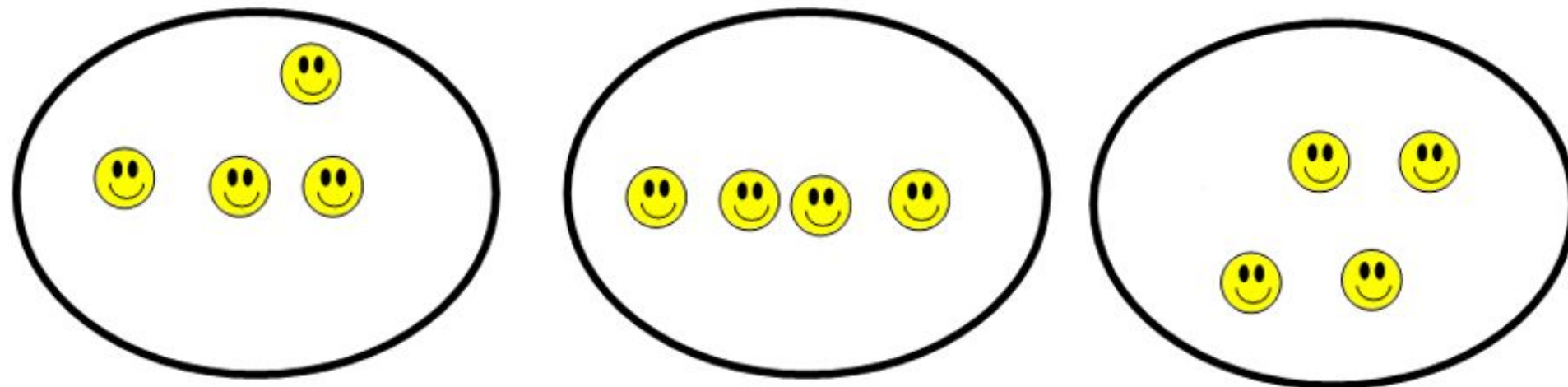
Produttori di pensiero matematico



$$3 + 4 + 5$$

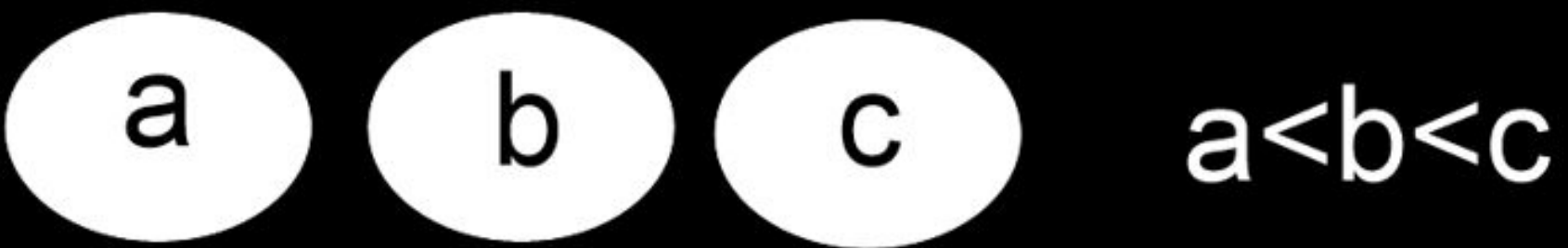


$$3 + 1 + 4 + 5 - 1$$



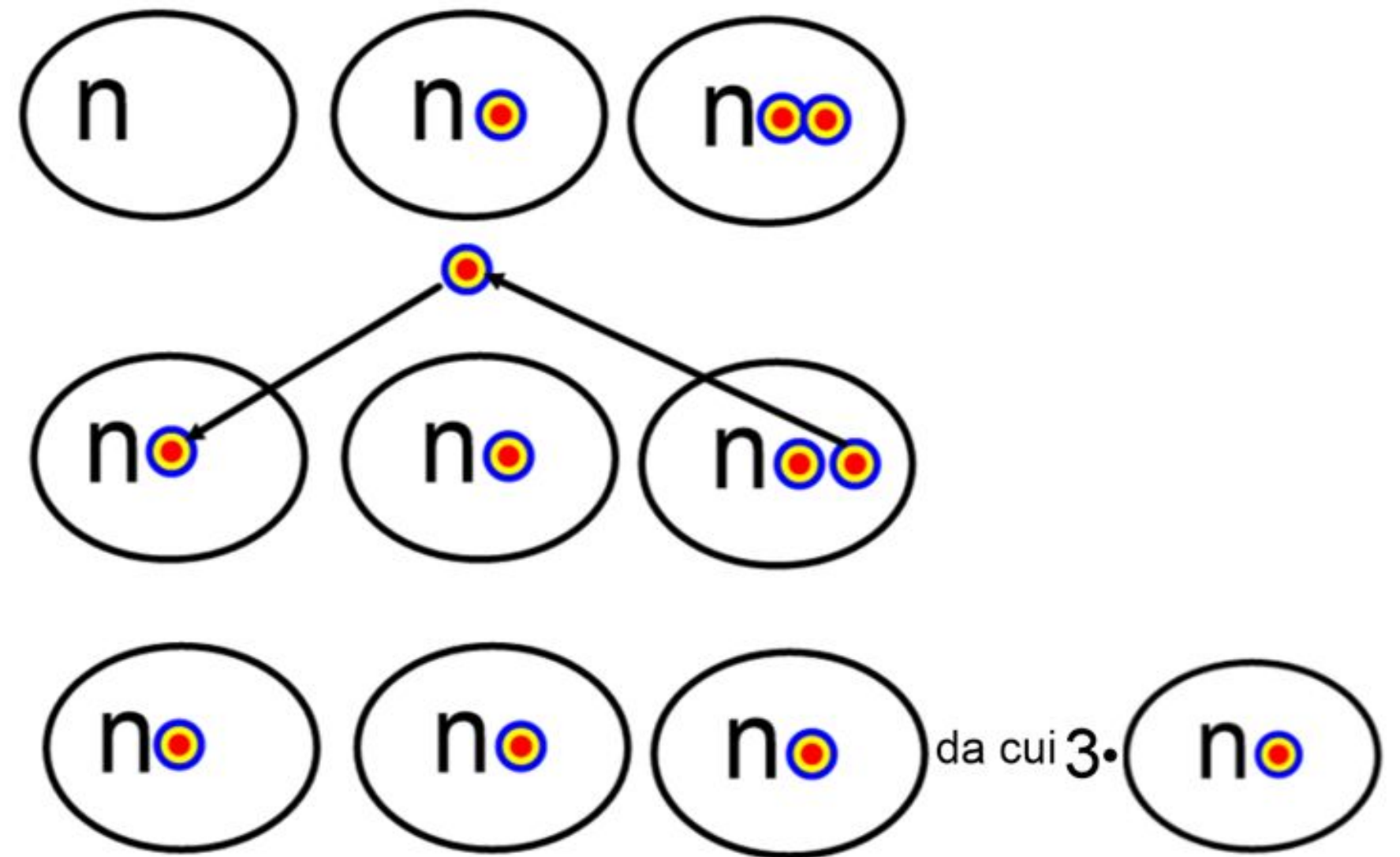
$$4 + 4 + 4$$

Esprimere i tre numeri
sapendo che sono differenti



come procedere?

Esprimere i tre numeri in relazione al primo



Diminuisce le variabili da considerare

Messa in formule della situazione

$$\begin{array}{ccc} a & a + 1 & a + 2 \\ \text{primo numero} & \text{secondo numero} & \text{terzo numero} \end{array}$$

$$a + a + 1 + a + 2 = a + a + a + 1 + 2$$
$$= 3 \cdot a + 3 \quad \text{«Tre volte il primo numero + 3»}$$

«Tre volte il primo numero + 3»

ancora più veloce

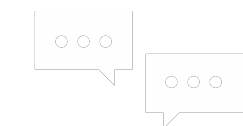
$$3 \cdot a + 3 = 3 \cdot \overset{\text{secondo numero}}{(a + 1)}$$

p. distributiva a ritroso

«raccolgimento a fattore comune»

«Il triplo del secondo numero»

$$3 \cdot (a + 1)$$



WEBINAR

$$29+30+31$$

$$17+18+19$$

$$54+55+56$$

$$a+b+c$$

$$17 +$$

$$18 +$$

$$19 =$$

$$3 \cdot (a+1)$$

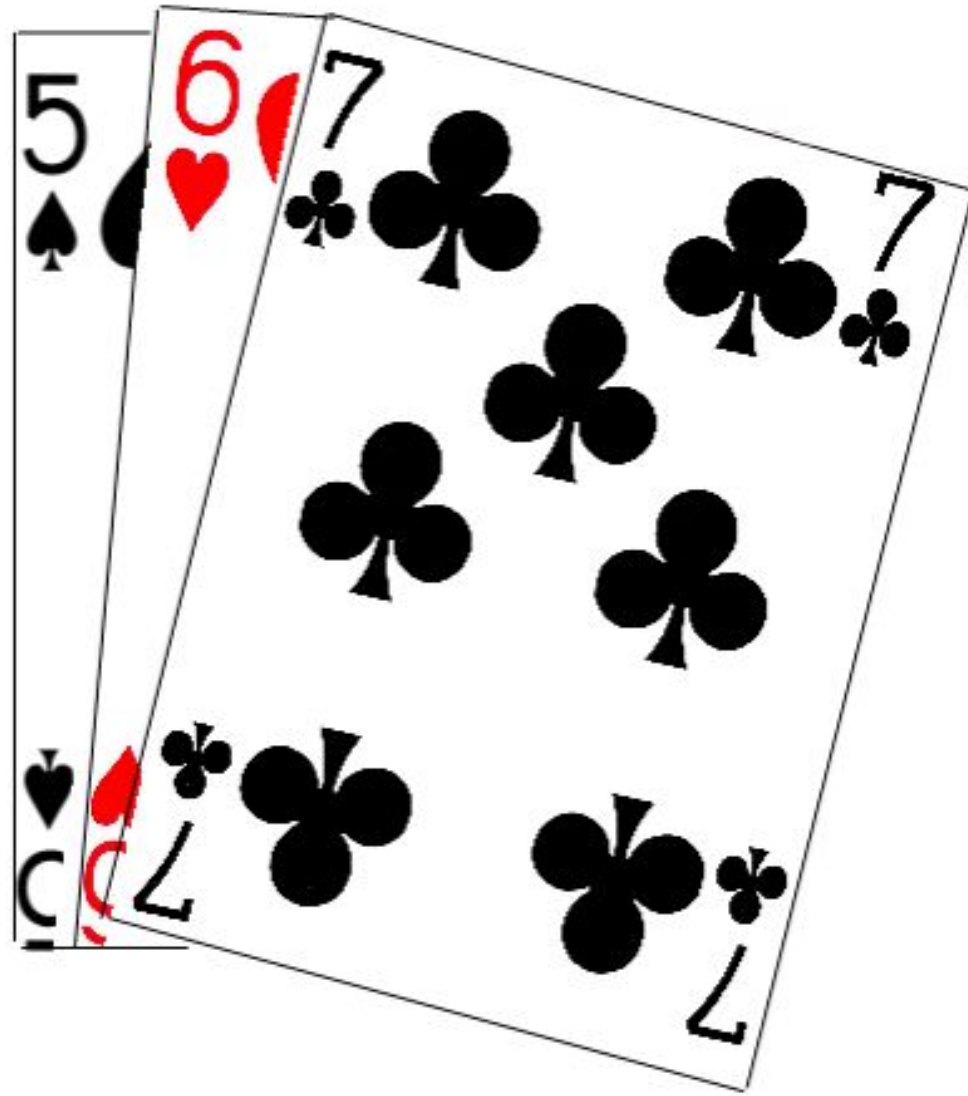
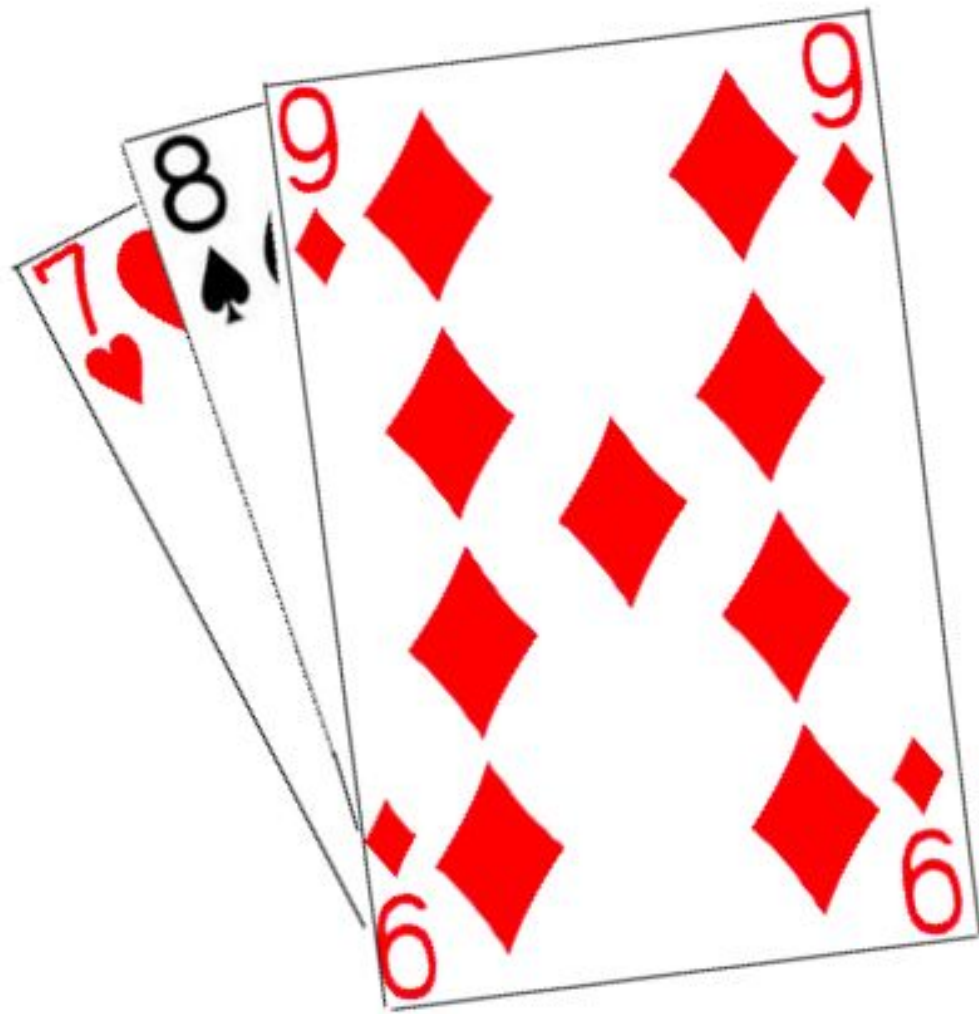
$$18 \cdot$$

$$3 =$$

TORNEO

SCALA

40



Quanti punti?

E se...?

Il prodotto di tre numeri consecutivi è sicuramente un numero pari.

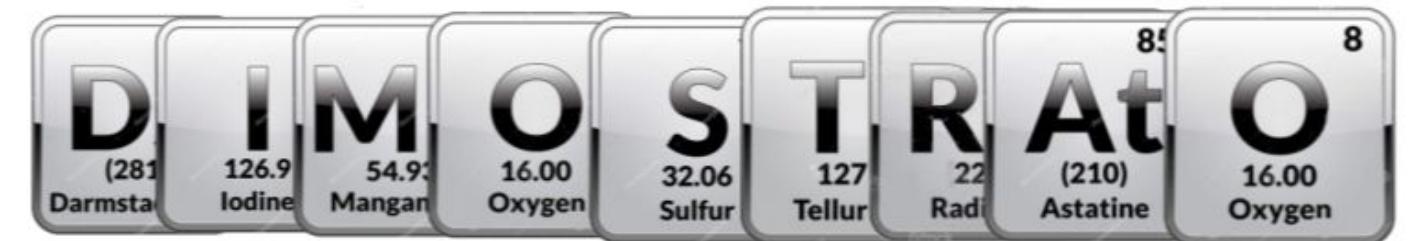
[V] [F]

Motiva la risposta.

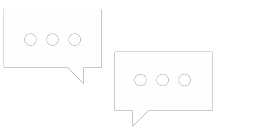
WEBINAR

- * Vista l'alternanza dei numeri pari e dispari, almeno uno dei tre numeri deve essere pari.
- * Vista la seguente tabella riferita alla moltiplicazione

X	Pari	Dispari
Pari	Pari	Pari
Dispari	Pari	Dispari



Il prodotto fra tre numeri consecutivi è sempre un numero pari.



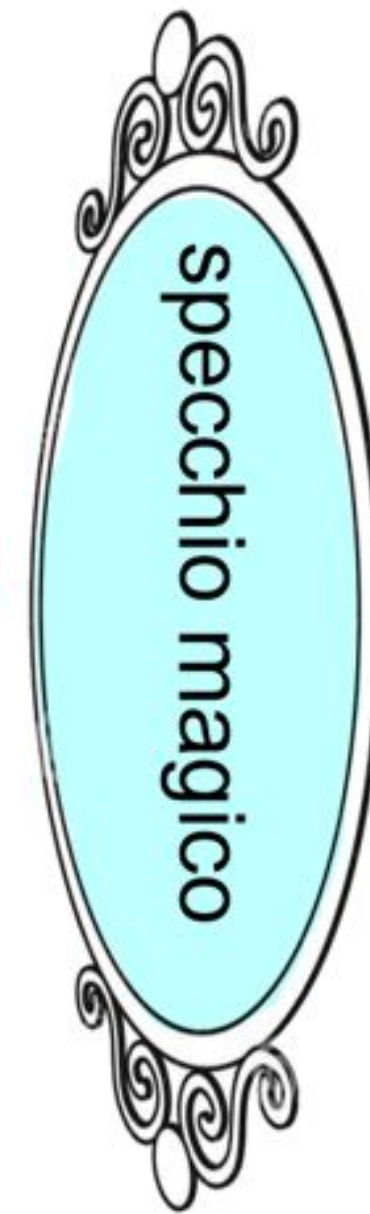
WEBINAR

Operazioni dirette e inverse

$10 \cdot 5 = 50$ allora $50 : 5 = 10$



$$10 \cdot 5 = 50$$



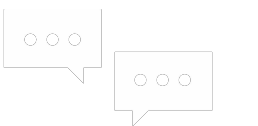
$$50 : 5 = 10$$

$$x \cdot 9 = 306 \text{ allora } 306 : 9 = x$$

$$x = 34$$

$$12 \cdot x = 300 \text{ allora } x \cdot 12 = 300$$

$$\text{allora } 300 : 12 = x = \frac{\cancel{300}^{\cancel{100}^{\cancel{50}^{25}}}}{\cancel{12}^{\cancel{4}^{\cancel{2}^1}}} = 25$$



WEBINAR

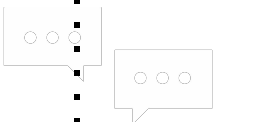
Scrivi un numero di tre cifre (148) e poi scrivi il numero che si forma ripetendo per due volte la sequenza delle tre cifre iniziali (148148).

Per quale fattore è necessario moltiplicare un numero qualsiasi di tre cifre affinché si formi un numero composto dalla doppia sequenza delle tre cifre iniziali?

$$148 \cdot x = 148\ 148 \text{ allora } x = ?$$

$$327 \cdot x = 327\ 327 \text{ allora } x = ?$$

$$\triangle \circ \square \cdot x = \triangle \circ \square \triangle \circ \square \text{ allora } x = ?$$



WEBINAR

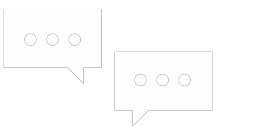
Per quale motivo moltiplicare un numero a tre cifre per 1001 significa ripetere per due volte la sequenza delle cifre del numero iniziale?

$$x = \frac{148\ 148}{148} = 1001$$

$$x = \frac{327\ 327}{327} = 1001$$

Con $x, y, z \in \text{CIFRE}$

$$\begin{array}{r} \text{xyz} \cdot \\ 1001 = \\ \hline \text{xyz} \\ 000- \\ 000- \\ \text{xyz}- \\ \hline \text{xyz xyz} \end{array}$$



WEBINAR

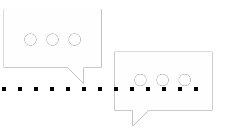
E se...?

Per quale motivo tutti i numeri formati da una doppia sequenza di cifre (549549) sono divisibili per 7?

	A	B	C
1	a	a*1001	(a*1001)/7
2	123	123123	17589
3	468	468468	66924
4	999	999999	142857
5	100	100100	14300
6	789	789789	112827
7	811	811811	115973
8	107	107107	15301
9	325	325325	46475
10	456	456456	65208
11	“	#VALORE!	#VALORE!
12			

Un numero è sicuramente divisibile per un altro numero se è stato moltiplicato precedentemente per quel numero

Scrivere un numero formato da una doppia sequenza delle stesse tre cifre significa averlo moltiplicato anche per 7?



WEBINAR

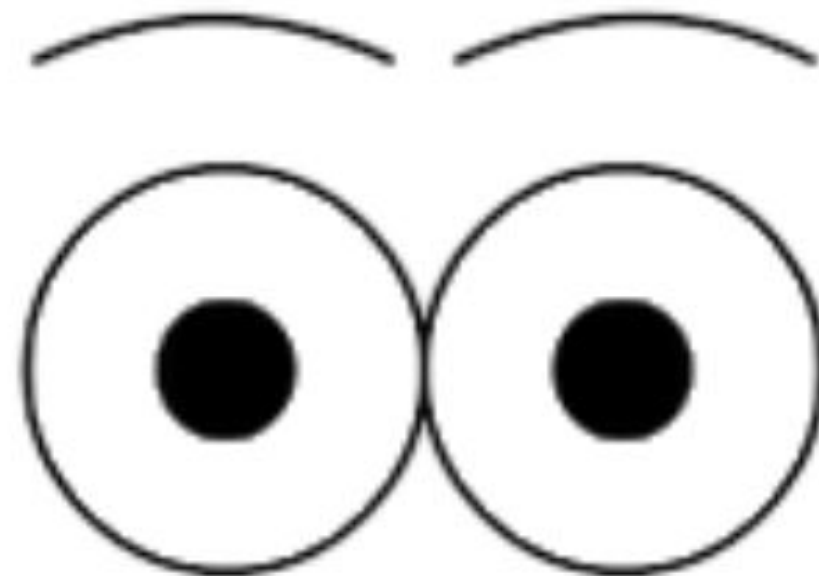
1001	7
143	11
13	13
1	

D (281) Darmsta	I 126.9 Iodine	M 54.93 Mangan	O 16.00 Oxygen	S 32.06 Sulfur	T 127 Tellur	R 22 Radi	At 85 (210) Astatine	O 16.00 Oxyge
------------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	---------------------------	------------------------	--------------------------------------	----------------------------



INDUZIONE

da risultati convergenti di più casi/esempi alla regola generale.
Accresce il sapere ma non dà certezze assolute



DEDUZIONE

dalla regola generale al caso/esercizio singolo.
Conclusioni sicure ma non accresce il sapere



WEBINAR

$$y_{max} = 254$$

$$P(x) = 2,68 \cdot 10^{-9} x^2 + 77$$

lunghezza 1624 m

$$-812 \leq x \leq 812$$

altezza 95,12 m

$$(x + 4492,8)^2 = 45000^2$$



*lim(matematica) = diviene uno strumento
didattica → messa in formule di accrescita del pensiero*

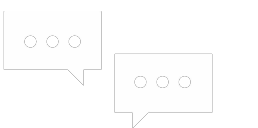


WEBINAR

Qual è il risultato della seguente moltiplicazione composta in totale da 26 parentesi, una per ogni lettera dell'alfabeto?

$$(x - a) \cdot (x - b) \cdot \dots \cdot (x - z) = ?$$

Chiedersi se il compito assegnato favorisce la costruzione di un processo logico astratto

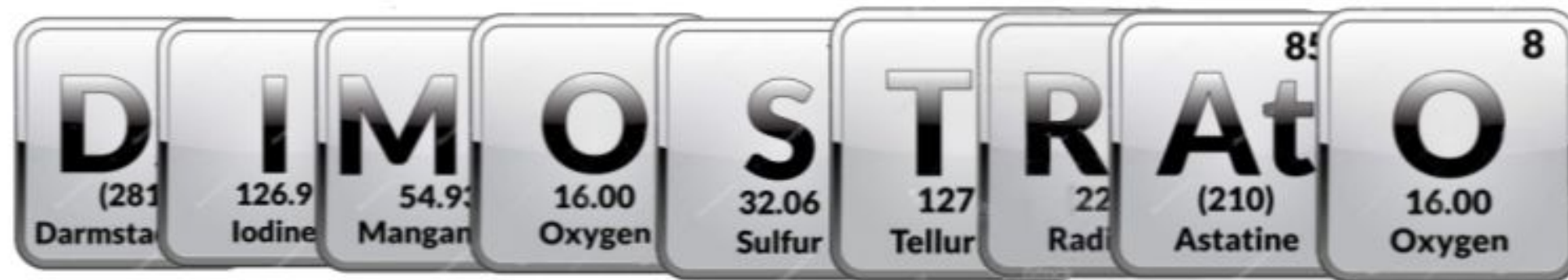


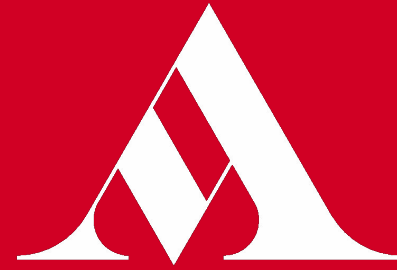
WEBINAR



Qual è il risultato della seguente moltiplicazione composta in totale da 26 parentesi, una per ogni lettera dell'alfabeto?

$$(x - a) \cdot (x - b) \cdot \dots \cdot (x - x) \cdot (x - y) \cdot (x - z) = \text{ZERO}$$





EDUCATION

www.mondadorieducation.it