Esame di Stato 2019 – Seconda prova scritta per licei scientifici

PROBLEMA 1

- Per trovare i punti stazionari della funzione $g(x)$ calcoliamo la derivata prima $g'(x)$ e studiamo la disequazione $g'(x) \geq 0$. La derivata prima risulta
$$g'(x) = e^{2x-x^2}[-2ax^2 + 2(a-b)x + 2b + a]$$
Il segno della derivata coincide con il segno del termine in parentesi quadre. Risolviamo allora la disequazione
$$-2ax^2 + 2(a-b)x + 2b + a \geq 0$$
Il $\Delta/4$ del polinomio a membro sinistro è $3a^2 + 2ab + b^2$, che è strettamente positivo $\forall a \neq 0, \forall b \in \mathbb{R}$. Otteniamo allora due zeri distinti per $g'(x)$ nelle ascisse $x_{1/2} = \frac{(a-b)\pm\sqrt{3a^2+2ab+b^2}}{2a}$, che corrispondono a due punti stazionari per $g(x)$. Per $a > 0$, data la concavità verso il basso della parabola a membro sinistro, abbiamo
$$g'(x) \geq 0 \text{ per } x_1 \leq x \leq x_2 \quad ; \quad g'(x) < 0 \text{ altrove}$$
Quindi per $a > 0$ il punto della curva di ascissa x_1 è un minimo, mentre il punto di ascissa x_2 è un massimo. Per $a < 0$ il primo punto è un massimo e il secondo è un minimo.

Per capire se sono assoluti o relativi, studiamo il comportamento all'infinito di g ottenendo:
$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$$
Inoltre, essendo $a \neq 0$, esiste certamente un x_0 tale che sia $g(x_0) = g_0 \neq 0$, quindi la funzione non è ovunque nulla.

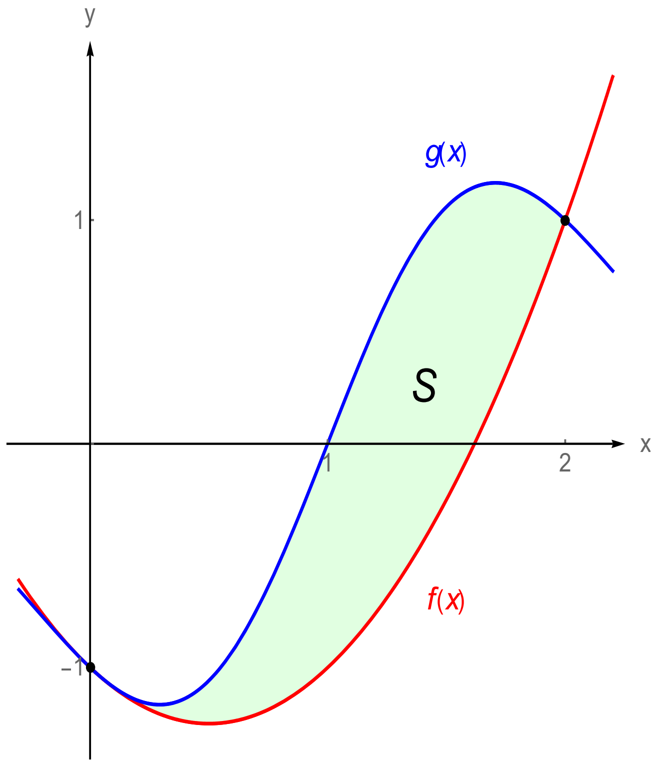
Il segno di $g(x)$ cambia una sola volta, in $x = -\frac{b}{a}$. Se $a > 0$, la g risulterà negativa prima di tale punto, viceversa se $a < 0$. Ragioniamo per $a > 0$ (per $a < 0$ l'argomentazione è del tutto analoga)

Esisterà un $x_1 < 0$ tale che risulti $g(x) > g_0\ \forall x < x_1$, ed esisterà un $x_2 > 0$ tale che sia $g(x) < g_0\ \forall x > x_2$. Nel chiuso $[x_1, x_2]$ la g è continua, dunque si applica il teorema di Weierstrass, per cui esistono M ed m, massimo e minimo di g in $[x_1, x_2]$, che, per la proprietà sopra scritta, sono anche il massimo assoluto e il minimo assoluto di g in $\mathbb{R}$.

Imponiamo ora che il punto A appartenga a entrambe le curve. Otteniamo il sistema
$$\begin{cases} 1 = 4a + b - 2 \\ 1 = 2a + b \end{cases}$$
da cui a = 1 e b = -1.

- Le funzioni risultano essere $f(x) = x^2 - x - 1$ e $g(x) = (x-1)e^{2x-x^2}$. La funzione f è una parabola con concavità verso l'alto con vertice $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ e passante per il punto (0, -1). La funzione g è definita ovunque in $\mathbb{R}$, ha un massimo assoluto in $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ e un minimo assoluto in $x_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Inoltre abbiamo $g(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1/2}$ e $g(x_2) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$. Ponendo $t = x -$

1 abbiamo $g(t) = te^{1-t^2}$ e risulta $g(t) = g(-t)$ ossia la funzione $g(t)$ è dispari e ha centro di simmetria in $(t = 0,\ g(0) = 0)$. Allora $g(x)$ ha un centro di simmetria nel punto $(1{,}0)$.
I grafici delle due funzioni sono:



Sostituendo in $f(x)$ e $g(x)$ le coordinate del punto $B(0,-1)$ verifichiamo che B appartiene a entrambe le curve. Inoltre $f'(0) = -1 = g'(0)$ quindi nel punto B le curve sono tangenti.
L'area S delimitata dalle due curve è data dall'integrale

$$S = \int_0^2 \big(g(x) - f(x)\big)\ dx = \int_0^2 g(x)\,dx - \int_0^2 f(x)\,dx$$

Il primo integrale è nullo perché g è integrata in un intervallo simmetrico rispetto al proprio centro di simmetria. Allora il calcolo di S si riduce al calcolo del secondo integrale:

$$S = -\int_0^2 x^2 - x - 1\ dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

- Poiché $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4} > -\frac{1}{2}$ e $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}} = 1{,}06 > 1$ solo le correnti i_1 e i_2 sono concatenate alla circuitazione del campo magnetico lungo il contorno di S. La circuitazione del campo dipende quindi unicamente dalle correnti i_1 e i_2:

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0(i_1 + i_2)$$

La corrente i_1 è entrante nel foglio, quindi la circuitazione del campo magnetico è positiva se effettuata in senso orario guardando la regione S dalle z positive. Distinguiamo due casi:

- i_2 concorde a i_1: la circuitazione del campo magnetico totale è negativa;

- i_2 discorde rispetto a i_1: se $|i_1| > |i_2|$ la circuitazione è negativa, se $|i_1| < |i_2|$ la circuitazione è positiva, se le correnti sono uguali in modulo la circuitazione è nulla.

- Indicato con $\theta(t) = \omega t$ l'angolo formato dal versore normale alla spira sul bordo di S con il campo magnetico uniforme $\vec{B}$, il flusso $\Phi(\mathrm{t})$ del campo magnetico attraverso la spira è
$$\Phi = BS\cos(\omega t)$$
Dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz la corrente indotta vale quindi
$$i(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{BS\omega}{R}\sin(\omega t)$$
Il massimo della corrente si ottiene quando il termine sin è pari a 1:
$$i_{\max} = \frac{BS\omega}{R} \Rightarrow \omega = \frac{i_{\max}R}{BS} = 0{,}05\ \mathrm{rad/s}$$

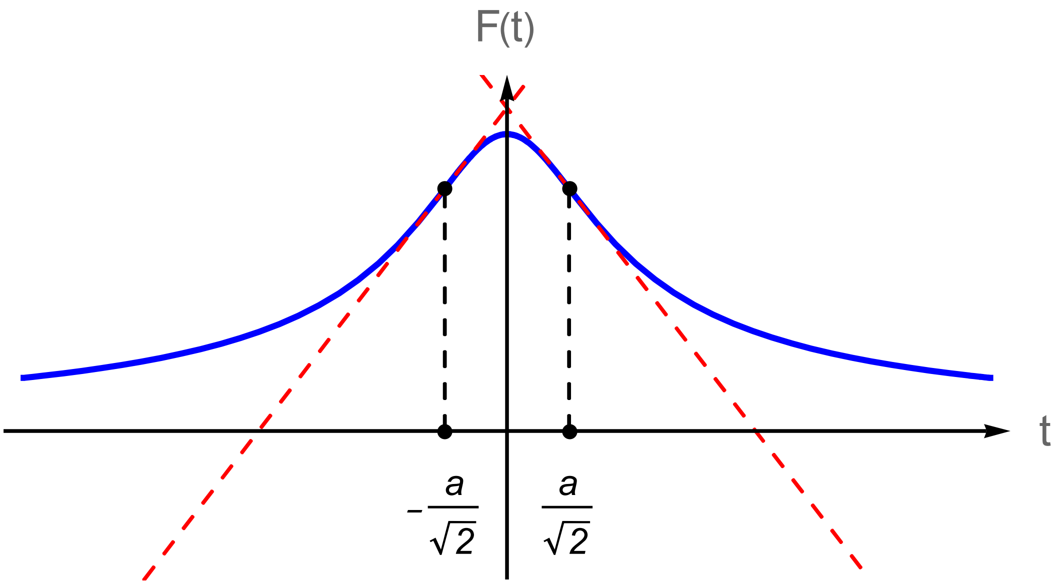
PROBLEMA 2

- Poiché il termine a^2 è in somma algebrica con il termine t^2, le dimensioni di a sono quelle di un tempo. Sapendo che il campo magnetico si misura in tesla (T) risulta:
$$[\mathrm{T}] = k\,[\mathrm{s}]^{-2}[\mathrm{m}] \Rightarrow k = \frac{[\mathrm{T}]}{[\mathrm{m}]}[s]^2$$
Tra le armature del condensatore è presente una corrente di spostamento i_s data dalla variazione del flusso Φ_E del campo elettrico $\vec{E}$ tra le armature attraverso la superficie racchiusa dalla circonferenza di raggio r, secondo la formula
$$i_s = \varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$$
Nei punti interni al condensatore il campo elettrico è diretto parallelamente all'asse di simmetria del condensatore, mentre il campo magnetico in un punto interno giace sul piano passante per quel punto e perpendicolare all'asse di simmetria.
- $\vec{B}$ è sempre tangente alla circonferenza di raggio r con centro sull'asse di simmetria del condensatore. Allora la sua circuitazione è semplicemente $B2\pi r$. Dal teorema di Ampère-Maxwell, sapendo che non sono presenti correnti concatenate, risulta
$$B2\pi r = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} \Rightarrow \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$$

Allora, dal teorema fondamentale del calcolo integrale,
$$\Phi_E = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0\varepsilon_0}\int_0^t t(t^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}\,dt = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0\varepsilon_0}\left[-(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^t = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}+\frac{1}{a}\right]$$
Sapendo che $\Phi_E = \pi r^2 E$ e che d.d.p. = Ed risulta:
$$\mathrm{d.d.p.} = \frac{2kd}{\mu_0\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}+\frac{1}{a}\right]$$
Il limite $\lim_{t\to+\infty}\left|\vec{B}(t)\right|$ si riduce, per confronto degli infiniti, a $\lim_{t\to+\infty}\left|\frac{t}{t^3}\right| = 0$. Fisicamente, la d.d.p. tende a un valore asintotico costante. Per tempi molto grandi il flusso del campo elettrico non

varia più nel tempo e la corrente di spostamento si annulla e quindi anche il campo magnetico tende asintoticamente a zero.

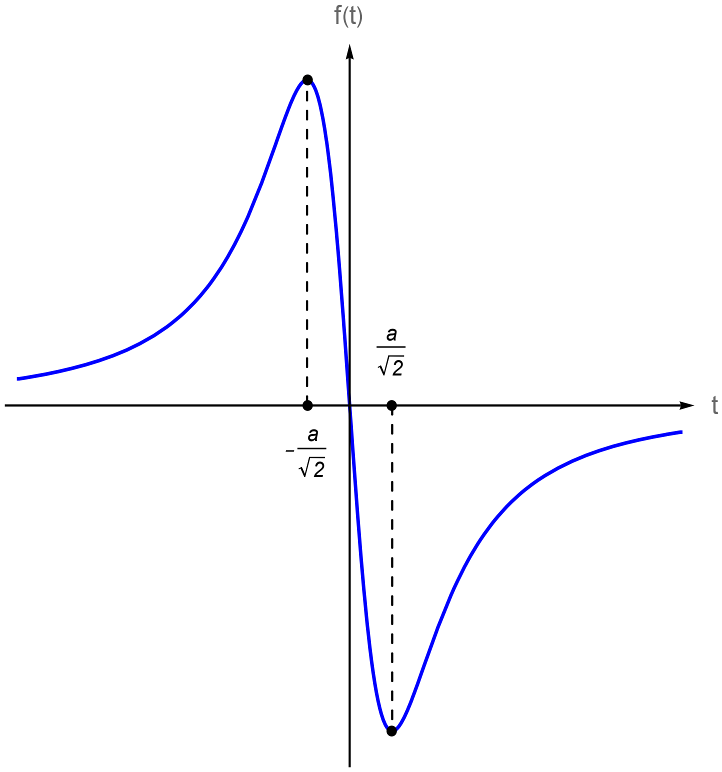
- Poiché $F'(t) = f(t)$ ed $F(0) = 0$ risulta verificato che F è la primitiva di f passante per l'origine. Inoltre $F(t) = F(-t)$, ossia F è una funzione pari. La derivata $f(t)$, che è di conseguenza una funzione dispari, si annulla in $t = 0$, è negativa per $t > 0$ e positiva per $t < 0$. L'origine è quindi un punto di massimo per $F(t)$ e, poiché $\lim_{t\to\pm\infty} F(t) = -1/a$, si tratta di un massimo assoluto. Ponendo $F''(t) = 0$, cioè $f'(t) = 0$ risultano due punti di flesso in $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$, e la funzione F ha concavità verso il basso per $-\frac{\sqrt{2}}{2}a < t < +\frac{\sqrt{2}}{2}a$, verso l'alto altrove.



Le pendenze delle rette tangenti a F nei punti di flesso sono date dal valore di f nelle ascisse dei punti di flesso, ossia:

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \mp\frac{2}{9}\frac{\sqrt{3}}{a^2}$$

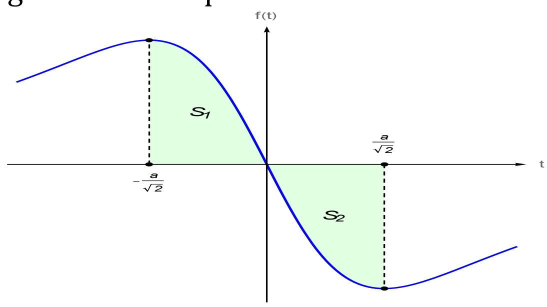
- Possiamo ricostruire il grafico di f a partire dal grafico di F ricordando che i punti di flesso di F sono i punti stazionari di f. Inoltre f ha lo stesso comportamento all'infinito di F, passa per l'origine e, poiché è la derivata di una funzione pari, è una funzione dispari. Inoltre, dal segno della derivata di F risulta che f è positiva per $t < 0$ (negativa per $t > 0$). Il grafico di f è quindi:



Data la simmetria della funzione, l'area richiesta è data da:

$$A=2S_2=2\left(-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}-t(t^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}\,dt\right)=-2\left[(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{2}{a}\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

Avendo indicato con S_2 la regione nel semipiano $x > 0$.



Invece, l'integrale $\int_{-b}^{b} f(t)\,dt$ è sempre nullo perché integrale di funzione dispari su intervallo simmetrico rispetto al suo centro di simmetria.

QUESITI

1) Se f ha un asintoto orizzontale allora il grado di $p(x)$ è uguale al grado del denominatore: $p(x) = k(x-a)(x-b)$. Poiché f si annulla in $x = 0$ e $x = 12/5$ allora $p(x)$ è del tipo

$$p(x) = kx\left(x - \frac{12}{5}\right) = \frac{kx(5x-12)}{5}$$

Affinché f abbia due asintoti verticali in $x = \pm 3$ deve essere $(x+3)(x-3) = x^2 + d$ da cui $d = -9$. La funzione è allora

$$f(x) = \frac{kx(5x-12)}{5(x+3)(x-3)}$$

e infine, affinché $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k$ sia uguale a 5, deve essere $k = 5$ e la funzione si scrive come:

$$f(x) = \frac{x(5x-12)}{(x+3)(x-3)}$$

I punti di massimo e di minimo si hanno ponendo $f'(x) = 0$, da cui risulta che $x_1 = 6$ è un punto di minimo e $x_2 = \frac{3}{2}$ è un punto di massimo.

2) Eseguiamo un raccoglimento a fattor comune, ottenendo:

$$g(x) = x(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2016} + x^{2018})$$

Cerchiamo un valore x_0 per cui sia $g(x_0) = 0$.

Osserviamo che il polinomio $g'(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2016} + x^{2018}$ è positivo per ogni valore di x, poiché è somma di un numero reale positivo e di potenze di x con esponente pari. Quindi $g(x)$ è monotonicamente crescente e presenta perciò una sola radice, ossia $x_0 = 0$.

Calcoliamo $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{1{,}1^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2017} + x^{2019}}{1{,}1^x}$

Eseguiamo un raccoglimento a fattor comune a numeratore e otteniamo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2019}\left(\frac{1}{x^{2019}} + \frac{1}{x^{2017}} + \frac{1}{x^{2015}} + \frac{1}{x^{2013}} + \cdots + \frac{1}{x^2} + 1\right)}{1{,}1^x}$$

Il limite si presenta, quindi, nella forma di indeterminazione $\frac{\infty}{\infty}$.

Ricorriamo alla gerarchia degli infiniti e osserviamo che a denominatore è presente una funzione esponenziale con base maggiore di 1, mentre a numeratore è presente una funzione potenza. Poiché gli esponenziali rappresentano un ordine di infinito superiore a quello delle funzioni potenza, otteniamo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{1{,}1^x} = 0$$

In alternativa, è possibile osservare che il numeratore e il denominatore sono derivabili con continuità infinite volte e che sono sempre soddisfatte le ipotesi del teorema di De L'Hôpital. Applicando, quindi, il teorema per 2019 volte si ottiene:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2017} + x^{2019}}{1{,}1^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2019!}{1{,}1^x \cdot [\ln(1{,}1)]^{2019}} = 0$$

3) La superficie totale del parallelepipedo è $2l^2 + 4hl$, quindi $2l^2 + 4hl = S \Rightarrow h = \frac{S-2l^2}{4l}$.

La somma delle lunghezze degli spigoli è

$$L = 8l + 4h = 8l + \frac{S-2l^2}{l} = \frac{8l^2 + S - 2l^2}{l} = \frac{6l^2 + S}{l}.$$

Per minimizzare questa quantità, calcoliamone la derivata rispetto al lato l.

$$L'(l) = \frac{d}{dl}\left(6l + \frac{S}{l}\right) = 6 - \frac{S}{l^2}$$

Cerchiamo i punti in cui la derivata si annulla.

$$L'(l) = 0 \Leftrightarrow \frac{S}{l^2} = 6 \Leftrightarrow l^2 = \frac{S}{6} \Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{S}{6}}$$

(consideriamo solo la quantità positiva, perché l rappresenta una lunghezza).

Inoltre, studiando il segno di $L'(l) = 6 - \frac{S}{l^2}$ per $l > 0$, si verifica che la derivata è negativa per $l < \sqrt{\frac{S}{6}}$ e positiva per $l > \sqrt{\frac{S}{6}}$, quindi la quantità L è decrescente prima del punto trovato e crescente dopo, per cui $l = \sqrt{\frac{S}{6}}$ è effettivamente un punto di minimo, come volevamo.

Troviamo la corrispondente altezza del parallelepipedo.

$$h = \frac{S - 2\frac{S}{6}}{4\sqrt{\frac{S}{6}}} = \frac{\frac{2}{3}S}{4\sqrt{\frac{S}{6}}} = \frac{1}{6}S\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{S}} = \sqrt{\frac{S}{6}} = l$$

Quindi il parallelepipedo cercato è un cubo.

4) Indichiamo il generico punto P con le coordinate $(x; y; z)$. Utilizziamo le formule della distanza per esprimere $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2} =$$

$$= \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + \big(z-(-1)\big)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 + (z - z_B)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(x - (-2)\right)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2}$$

Sostituiamo nell'uguaglianza $\overline{PA} = \sqrt{2}\overline{PB}$ le espressioni trovate.

$$\sqrt{(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2}$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri. Non serve porre condizioni sui radicandi perché si tratta di somme di quadrati, quindi sono quantità sempre positive.

$$(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 2 \cdot [(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2]$$

Svolgiamo i calcoli.

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 + 2z + 1 = 2 \cdot (x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 2z + 1)$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 + 2z + 1 = 2x^2 + 8x + 8 + 2y^2 - 8y + 8 + 2z^2 - 4z + 2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0$$

Abbiamo ottenuto l'equazione di una superficie sferica, che possiamo riscrivere nella forma

$$x^2 + 12x + 36 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 6z + 9 = -13 + 36 + 16 + 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x + 6)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 48$$

In questo modo abbiamo evidenziato il centro $C = (-6; 4; 3)$ e il raggio $r = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ della sfera.

Per verificare che il punto $T(-10; 8; 7)$ appartiene a S, sostituiamo nell'equazione della superficie le coordinate di T.

$$x_T{}^2 + y_T{}^2 + z_T{}^2 + 12x_T - 8y_T - 6z_T + 13 = 0$$

$$(-10)^2 + 8^2 + 7^2 + 12 \cdot (-10) - 8 \cdot 8 - 6 \cdot 7 + 13 = 0$$

$$100 + 64 + 49 - 120 - 64 - 42 + 13 = 0$$

$$0 = 0$$

Poiché otteniamo un'uguaglianza vera, possiamo concludere che T appartiene alla superficie sferica S.

Il piano tangente alla superficie S nel punto T ha un'equazione della forma $ax + by + cz + d = 0$.

Per trovare i coefficienti a, b, c, scriviamo l'equazione parametrica dalla retta su cui giace il vettore CT.

$$\begin{cases} x - x_C = t(x_C - x_T) \\ y - y_C = t(y_C - y_T) \\ z - z_C = t(z_C - z_T) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - (-6) = t(-6 - (-10)) \\ y - 4 = t(4 - 8) \\ z - 3 = t(3 - 7) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -6 + 4t \\ y = 4 - 4t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$$

I coefficienti relativi al parametro t coincidono con i coefficienti a, b, c del piano tangente, che quindi ha un'equazione del tipo $4x - 4y - 4z + d = 0$.

Per trovare il valore di d sostituiamo le coordinate di T nell'equazione appena trovata:

$$4 \cdot (-10) - 4 \cdot 8 - 4 \cdot 7 + d = 0$$

$$-40 - 32 - 28 + d = 0$$

$$-100 + d = 0$$

$$d = 100$$

Quindi l'equazione del piano tangente a S in T è $4x - 4y - 4z + 100 = 0$.

5)

- Considerando il lancio di 4 dadi, l'evento "La somma delle facce è non superiore a 5" equivale all'unione degli eventi:
  "Escono quattro 1"
  "Escono un 2 e tre 1"

  La probabilità che lanciando quattro dadi escano quattro "1" è $\left(\frac{1}{6}\right)^4$

  La probabilità che escano un "2" e tre "1" è $4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4$

  Perciò la probabilità cercata è data da $\left(\frac{1}{6}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{5}{6^4} \approx 0{,}39\%$

- L'evento "Il prodotto delle facce è un multiplo di 3" equivale all'evento "Almeno una delle facce uscite è un 3 oppure un 6".
  Osserviamo che questo evento è l'evento contrario di "Nessuna delle facce uscite è 3 oppure 6", che a sua volta equivale a "Escono solo facce 1, 2, 4, 5", la cui probabilità è $\left(\frac{4}{6}\right)^4$.
  Perciò, per il teorema della probabilità contraria la probabilità dell'evento richiesto è data da

$$1 - \left(\frac{4}{6}\right)^4 = \frac{65}{81} \approx 80{,}25\%$$

- L'evento "Il massimo numero uscito è 4" è equivalente al prodotto logico degli eventi A:"Almeno una faccia uscita è 4" e B:"Non sono uscite le facce 5 e 6", che sono dipendenti.
  La probabilità è perciò data dalla formula $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$

  La probabilità di B è data da $\left(\frac{4}{6}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

  La probabilità che almeno una faccia uscita sia 4, sapendo che non sono usciti 5 e 6 è data da

$$1 - P(C)$$

  con C:"Escono solo facce 1, 2 oppure 3, sapendo che non sono usciti 5 e 6"

Poiché $P(C)=\left(\frac{3}{4}\right)^4$, abbiamo che la probabilità che il massimo numero uscito sia 4 è data da:

$$\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^4\right]\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4 \approx 13{,}5\%$$

6) Per la legge di Lenz, il verso della corrente indotta nella spira si oppone alla variazione del flusso che la genera. La corrente ha verso orario quando la variazione di flusso è negativa.

Detta S la superficie della spira e R la resistenza, la corrente media si calcola applicando la formula

$$i_M=-\frac{S}{R}\cdot\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\frac{dB}{dt}=-\frac{S}{R\cdot\Delta t}[B(t+\Delta t)-B(t)]$$

Svolgiamo i calcoli nei tre casi richiesti.

a) $i_M=-\frac{S}{R\cdot\Delta t}[B(t+\Delta t)-B(t)]=-\frac{30\ cm^2}{4\ m\Omega\cdot 3\ ms}[B(3\ ms)-B(0\ ms)]=$

$$=-\frac{30\ cm^2}{4\ m\Omega\cdot 3\ ms}[-0{,}2\ m\mathrm{T}]=5\cdot 10^{-2}\ \mathrm{A}$$

b) $i_M=-\frac{S}{R\cdot\Delta t}[B(t+\Delta t)-B(t)]=-\frac{30\ cm^2}{4\ m\Omega\cdot 2\ ms}[B(5\ ms)-B(3\ ms)]=$

$$=-\frac{30\ cm^2}{4\ m\Omega\cdot 2\ ms}[0{,}4\ m\mathrm{T}]=-0{,}15\ \mathrm{A}$$

c) $i_M=-\frac{S}{R\cdot\Delta t}[B(t+\Delta t)-B(t)]=-\frac{30\ cm^2}{4\ m\Omega\cdot 5\ ms}[B(10\ ms)-B(5\ ms)]=$

$$=-\frac{30\ cm^2}{4\ m\Omega\cdot 5\ ms}[-0{,}2\ m\mathrm{T}]=3\cdot 10^{-2}\ \mathrm{A}$$

7) Indichiamo con Δx e Δt le distanze spaziale e temporale nel riferimento solidale al laboratorio, mentre siano $\Delta x'$ e $\Delta t'$ le distanze spaziale e temporale nel secondo riferimento della navicella.

$$\Delta x=25cm=2{,}5\cdot 10^{-1}m$$

$$\Delta t=2ns=2\cdot 10^{-9}s$$

La velocità della particella nel riferimento del laboratorio è

$$u=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{2{,}5\cdot 10^{-1}}{2\cdot 10^{-9}}\frac{m}{s}=1{,}25\cdot 10^8\ {}^{m}/_{s}=\frac{5}{12}c\approx 0{,}42c$$

Le distanze nel riferimento della navicella sono, detta v la velocità relativa rispetto alla particella

$$\Delta x' = \gamma(v)(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Delta t' = \gamma(v)\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$$

La velocità della particella nel riferimento della navicella è quindi:

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x} = \frac{\Delta t\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} - v\right)}{\Delta t\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)} = \frac{u - v}{1 - \frac{v}{c^2}u} =$$

$$= \frac{(\frac{5}{12} - \frac{4}{5})c}{1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{12}} = \frac{-\frac{23}{60}}{1 - \frac{1}{3}}c = -\frac{23}{60} \cdot \frac{3}{2}c = -\frac{23}{40}c = -0{,}575c$$

Dove il fattore di Lorentz è

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}64}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}36}} = \frac{1}{0{,}6}$$

Dunque l'intervallo di tempo e la distanza misurati da un osservatore posto sulla navicella sono

$$\Delta t' = \frac{1}{0{,}6}\left(2 \cdot 10^{-9} - \frac{0{,}8}{3 \cdot 10^8} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-1}\right)s \approx 2{,}22 \text{ ns}$$

$$\Delta x' = \frac{1}{0{,}6}(2{,}5 \cdot 10^{-1} - 0{,}8 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-9})m \approx 3{,}83 \text{ m}$$

8) Il moto circolare uniforme sul piano perpendicolare all'asse dell'elica è conseguenza del ruolo di forza centripeta assunto dalla forza di Lorentz, la cui intensità è data da $|F| = qv_T B$, dove q indica la carica del protone, v_T la componente tangenziale della sua velocità e B l'intensità del campo magnetico. Poiché la forza di Lorentz che agisce sul protone è una forza centripeta abbiamo anche che $|F| = m\frac{{v_T}^2}{R}$, dove m indica la massa del protone e R il raggio dell'elica.

Otteniamo quindi

$$qv_TB = m\frac{{v_T}^2}{R}$$

Il periodo di questo moto circolare è dato da

$$T = 2\pi R/v_T$$

Lungo la direzione dell'asse dell'elica cilindrica abbiamo invece un moto rettilineo uniforme. Indichiamo con v_A la componente della velocità del protone lungo l'asse dell'elica e con Δx il passo dell'elica.
Nel tempo T il protone percorre una distanza $\Delta x = v_A \cdot T$.

Sostituendo l'espressione per T abbiamo

$$\Delta x = v_A \cdot \frac{2\pi R}{v_T}$$

Impostiamo quindi il sistema:

$$\begin{cases} qv_TB = m\frac{{v_T}^2}{R} \\ \Delta x = v_A \cdot \frac{2\pi R}{v_T} \end{cases}$$

Ricaviamo v_T dalla prima equazione

$$\begin{cases} v_T = \frac{RqB}{m} \\ \Delta x = v_A \cdot \frac{2\pi R}{v_T} \end{cases}$$

Sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$\begin{cases} v_T = \frac{RqB}{m} \\ \Delta x = v_A \cdot \frac{2\pi m}{qB} \end{cases}$$

Ricaviamo v_A

$$\begin{cases} v_T = \frac{RqB}{m} \\ v_A = \frac{\Delta x qB}{2\pi m} \end{cases}$$

Sapendo che $v = \sqrt{{v_T}^2 + {v_A}^2}$ otteniamo

$$v = \frac{qB}{m}\sqrt{R^2 + \left(\frac{\Delta x}{2\pi}\right)^2}$$

Sostituendo i dati otteniamo

$$v = \frac{(1{,}602 \cdot 10^{-19} C)(1{,}00 \cdot 10^{-3} T)}{1{,}673 \cdot 10^{-27}\mathrm{kg}}\sqrt{(0{,}105\mathrm{m})^2 + \left(\frac{0{,}381\mathrm{m}}{2\pi}\right)} \approx 1{,}16 \cdot 10^4 \mathrm{m/s}$$

L'angolo formato dalla velocità del protone con il vettore $\vec{B}$ è dato da:

$$\alpha = \arctan\frac{v_T}{v_A} = \arctan\frac{2\pi R}{\Delta x} = \arctan\frac{2\pi \cdot 0{,}105\mathrm{m}}{0{,}381\mathrm{m}} \approx 60°$$